音 楽 情 報 科 学 49－8
（２００３．２．２２）

金管楽器の物理モデルにおける反射関数の考察

山上 憲 †　　吉川 茂 ‡

† 九州芸術工科大学 芸術工学研究科 芸術工学専攻
‡ 九州芸術工科大学 芸術工学部 音響設計学科

〒 815-8540 福岡県福岡市南区塩原 4 丁目 9-1

†yamakami@lute.ad.kyushu-id.ac.jp
‡shig@kyushu-id.ac.jp

概要

これまでの管楽器のシミュレーション研究では，楽器の気柱自体の細かい特性についての考察はあまりなされていない。本研究では楽器内部の段差に注目することで，楽器気柱の応答の違いがどのように影響するかを検討する。トランペットの管内形状において，マウスピースと楽器の接続部分に段差あり/なしの２つのモデルの反射関数を求め，それを元に物理モデルで発音シミュレーションを行なった。シミュレーションは吹奏圧を一定にする場合と，徐々に上げていく場合の２通りを行なった。その結果，管内の段差の有無による反射関数の違いは，定常音の状態では，違いがほとんど見られないが，音の立ち上がりについては，多少ではあるが違いがあることが確認された。

On the Reflection Functions in Brass Instrument Physical Models

YAMAKAMI Ken　　YOSHIKAWA Shigeru

† Graduate School of Design, Kyushu Institute of Design
‡ Deptartment of Acoustic Design, Kyushu Institute of Design

4-9-1 Shiobaru, Minami-ward, Fukuoka 〒 815-8540, Japan

†yamakami@lute.ad.kyushu-id.ac.jp
‡shig@kyushu-id.ac.jp

abstract

In simulation research of wind instruments, considerations about fine characteristics of the air column have not been made yet. Focusing on a slight and abrupt change in bore radius, the resulting differences in the response of the air column were examined. Two kinds of physical models were assumed based on the trumpet bore shape: One has a discontinuity in radius at the connection between the mouthpiece and the instrument body; the other has no such a discontinuity. Simulations on the self-oscillation were performed in both steady-state and attack transient conditions after deducing the reflection functions from the assumed bore shapes. The effect of the bore discontinuity was not detected in the steady-state oscillation, but appreciably appeared in the attack transients.

1　はじめに

これまでの管楽器のシミュレーション研究では，音源部の振動モデルの構築，数値計算の高速化などについて行なわれてきている。しかし，楽器の気柱自体の細かい特性についての考察はあまりなされていない。

そこで，本研究では楽器内部の段差に注目することで，楽器気柱の応答の違いがどのように影響するかを検討する。

管楽器，擦弦楽器などの持続音楽器は，一般的に図 1 のようにモデル化される。[1]。

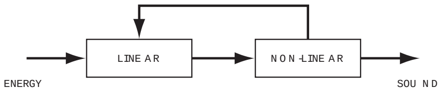

図 1: 一般的な持続音楽器のモデル

金管楽器の場合は非線形部は演奏者の唇であり，線形部は楽器気柱である。この線形部である楽器気柱のモデルに関して反射関数を求め、物理モデルでのシミュレーションを行う。

2　金管楽器の管内形状

現代の一般的な金管楽器は，大体のところ円筒管と，それと同程度の長さでほぼ円錐形に広がっていく部分，および開端部の急激に広がる短いフレアからなるとみなせる [2]。

楽器は製造上の都合により，ひとつの連続した管ではなく，さまざまな円筒管，円錐管とベルの組み合わせからできており，それぞれの管のつなぎ目が当然ながら存在する。半田付けや溶接で接合され，つなぎ目の内径は連続になるように調整されるが，そもそも取り外しを目的としたトロンボーンのスライド部分とベル部分のつなぎ目などでは内径は連続にならない。ある楽器 (CONN 社 112H Bass Trombone) では、接続部分で内直径が 14.1mm/15.4mm の違いがあり，その断面積の比は約 1.19 であった。

また，マウスピースの接続部分に注目すると，トランペットではリードパイプとマウスピースの間に隙間と段差ができる (ない場合もある)(図 2，3)。

段差はマウスピースの先端部の管の厚さ (0.3–0.8mm 程度) によるが，あるトランペット (KING 社 Symphony Trumpet) とマウスピース (KING 社 7M) の組み合わせでは，段差部分での内直径は 8.7mm と 9.8mm，その断面積の比は約 1.27 であった。この段差の調整で楽器の吹奏感が変わるとも言われている [3]。

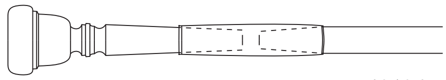

図 2: トランペットのマウスピース接続部

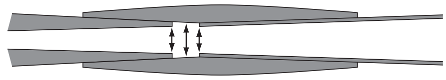

図 3: トランペットのマウスピース接続部 (拡大)

3　管内形状から反射関数を求める

管内形状から楽器気柱の応答関数である入力インピーダンスを求め，さらに，逆フーリエ変換を用いることで反射関数を求める。

反射関数 $r(t)$ が何であるかを明確に表せば，式 (1) になる ($p_{\mathrm{o}}(t)$:入力端での前進波音圧，$p_{\mathrm{i}}(t)$:入力端での後退波音圧)。

$$p_{\mathrm{i}}(t) = r(t) * p_{\mathrm{o}}(t) \tag{1}$$

入力にデルタ関数を考えると，反射関数 $r(t)$ はインパルス入射音圧に対する反射音圧応答である。

反射関数 $r(t)$ は，入力端は無反射とみなしているので，半無限の長さをもつ (入射した音波が戻ってこない) 入力端の径と同じ管 (インピーダンスの変化がない) を，入力端につないだ状態でのインパルス音圧に対する応答に等しい (図 4)。

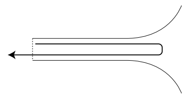

図 4: 反射関数の概念

反射関数 $r(t)$ は，入力インピーダンス Z_{IN} と特性インピーダンス $Z_0 = \rho c/S$ (ρ:空気の密度，c:音速，S:入力端の断面積) より，逆フーリエ変換を用いて

$$r(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{Z_{\mathrm{IN}} - Z_0}{Z_{\mathrm{IN}} + Z_0}\right] \tag{2}$$

となる。

3.1　入力インピーダンスの計算

入力インピーダンスの数値計算方法は Caussé[4] の方法を用いる。この方法では円筒管と円錐管で近似し，それにベル側での放射インピーダンスを加味して，入力インピーダンス求める。

音響管の入力端 (in) と出力端 (out) での音圧 p_{in} と p_{out} と体積流量 U_{in} と U_{out} は変換行列 $T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

を用いて，以下のように書ける。

$$\begin{bmatrix} p_{\mathrm{in}}(f) \\ U_{\mathrm{in}}(f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(f) & B(f) \\ C(f) & D(f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{\mathrm{out}}(f) \\ U_{\mathrm{out}}(f) \end{bmatrix} \quad (3)$$

音響管が N 個の円筒管，円錐管の組み合わせでできている場合は

$$\begin{bmatrix} p_{\mathrm{in}} \\ U_{\mathrm{in}} \end{bmatrix} = T_1 T_2 \ldots T_N \begin{bmatrix} p_{\mathrm{out}} \\ U_{\mathrm{out}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

のようにそれぞれの管の変換行列を積算して，変換行列を求める。

全体の出力端のインピーダンス=放射インピーダンス Z_{r} なので $Z_{\mathrm{out}} = p_{\mathrm{out}}/U_{\mathrm{out}}$ より，全体の入力端でのインピーダンス（入力インピーダンス）Z_{IN} は，

$$Z_{\mathrm{IN}} = \frac{p_{\mathrm{in}}}{U_{\mathrm{in}}} = \frac{A'Z_{\mathrm{r}} + B'}{C'Z_{\mathrm{r}} + D'} \quad (5)$$

$$\left(T_1 T_2 \ldots T_N = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \right)$$

となる。

3.2 放射インピーダンス

以下で述べることは、Levine らのフランジ無しの円筒管の放射インピーダンスの導出結果 [5] への Caussé らによる近似 [4] である。放射インピーダンス Z_{r} は波数 k，開口部の半径 r の積 $z = kr$ の関数として次のように近似する。$z < 1.5$ のとき，

$$Z_{\mathrm{r}} = \rho c \Big[\left(0.25z^2 + 0.082z^4 \ln z - 0.023z^6\right) + j\left(0.6133z - 0.036z^3 + 0.034z^3 \ln z - 0.0187z^5\right) \Big] \quad (6)$$

$1.5 \leq z$ では，

$$Z_{\mathrm{r}} = j\rho c \tan\left(k\Delta l + \frac{1}{2} j \ln R\right) \quad (7)$$

となる。ここで R は $R = e^{-z}\sqrt{\pi z}\left[1 + (3/32)\left(1/z^2\right)\right]$ で与えられる反射係数，また Δl は

$$\Delta l = r\left(0.634 - 0.1102z + 0.0018z^2 - 0.00005z^{4.9}\right) \quad (8)$$

で与えられる開口端補正値である。

3.3 円筒管の変換行列

音速 c，空気の密度 ρ，角周波数 ω，比熱比 γ，定圧比熱 C_p，定積比熱 C_v，$(\gamma = C_p/C_v)$，粘性係数 μ，熱伝導率 λ，粘性境界層の厚さ $l_v = \mu/\pi c$，熱境界層の厚さ $l_t = \lambda/\pi c C_p$，$r_v = r\sqrt{(\omega/c)(1/l_v)}$ $r_t = r\sqrt{(\omega/c)(1/l_t)}$ とする。

これらから，単位長さあたりの直列インピーダンス Z_v と並列アドミッタンス Y_t が，粘性と熱によるエネルギー損失を考慮して，次のように近似される。

$$Z_v = j\omega\rho\left[1 + \frac{2}{r_v}(1-j) - \frac{3j}{r_v^2}\right] \quad (9)$$

$$Y_t = \frac{j\omega}{\rho c}\left[1 + (\gamma - 1)\left(\frac{\sqrt{2}}{r_t}(1-j) + \frac{j}{r_t^2}\right)\right] \quad (10)$$

これを用いて変換行列 T は

$$\begin{bmatrix} p_{\mathrm{in}} \\ U_{\mathrm{in}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\Gamma L & \zeta\sinh\Gamma L \\ \frac{1}{\zeta}\sinh\Gamma L & \cosh\Gamma L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{\mathrm{out}} \\ U_{\mathrm{out}} \end{bmatrix} \quad (11)$$

となる。L は円筒管の長さ，$\Gamma = \sqrt{Z_v Y_t}$ は伝搬定数，$\zeta = \sqrt{Z_v/Z_t}$ は特性インピーダンスである。

3.4 円錐管の変換行列

円筒管の場合と同じように，変換行列 T は

$$\begin{bmatrix} p_{\mathrm{in}} x_{\mathrm{in}} \\ U_{\mathrm{in}} x_{\mathrm{in}} - \frac{p_{\mathrm{in}}}{Z_v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\Gamma L & \zeta\sinh\Gamma L \\ \frac{1}{\zeta}\sinh\Gamma L & \cosh\Gamma L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{\mathrm{out}} x_{\mathrm{out}} \\ U_{\mathrm{out}} x_{\mathrm{out}} - \frac{p_{\mathrm{out}}}{Z_v} \end{bmatrix} \quad (12)$$

とかける。x_{in} と x_{out} は，下図のとおりである。

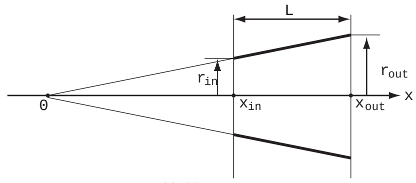

図 5: 円錐管での $x_{\mathrm{in}}, x_{\mathrm{out}}$

3.5 計算結果

入力インピーダンスと反射関数の計算結果を示す。モデルはトランペットの段差有・無の 2 つである。

内部形状 (図6，7) は，金管楽器解析ソフト BIAS[6] のサンプルデータを利用した。段差について，マウスピースの先端部に半径 4.3mm から 5.0mm，断面積比 1.33 の段差の有るモデルと無いモデルを用いた。図 8 は 2 つのモデルの相違部分の拡大図である。

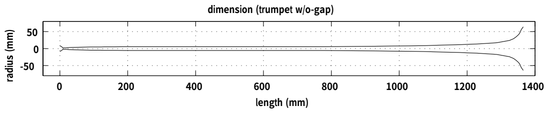

図 6: トランペット (段差無) の管内形状

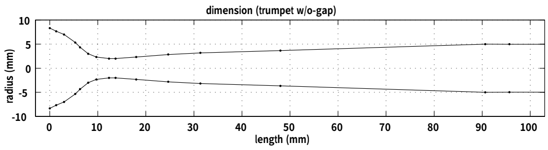

図 7: トランペット (段差無) の管内形状 [拡大図]

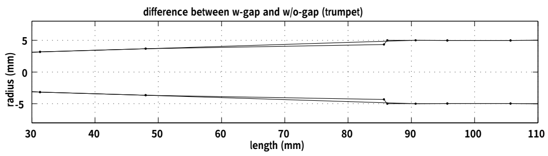

図 8: 段差部分

周波数は 1Hz 刻み，時間刻みはサンプリング周波数 96kHz として入力インピーダンスと反射関数の計算を行なう。

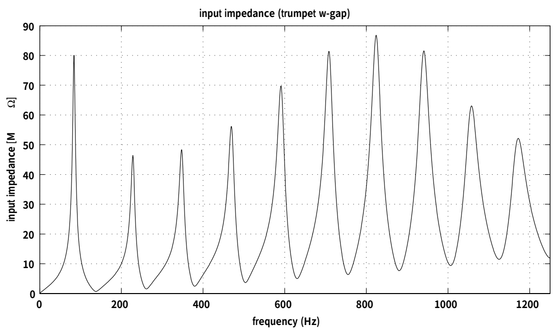

図 9: トランペット (段差有) の入力インピーダンス

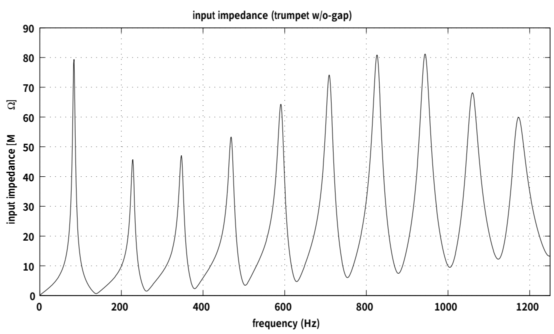

図 10: トランペット (段差無) の入力インピーダンス

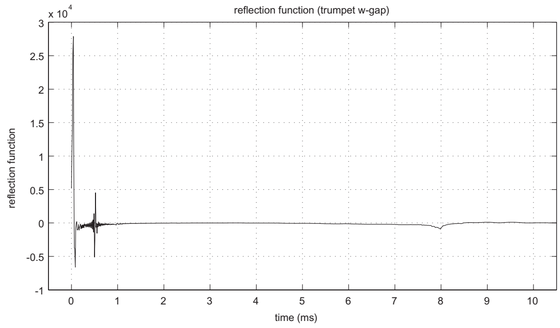

図 11: トランペット (段差有) の反射関数

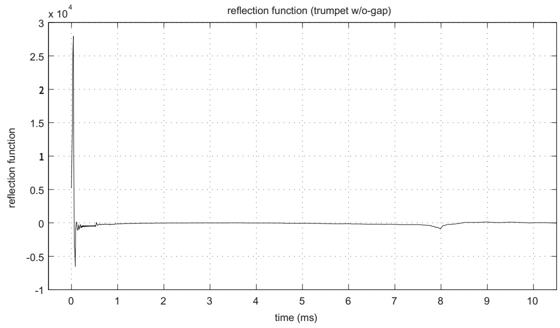

図 12: トランペット (段差無) の反射関数

3.6　考察

図 9，10 から分かるように、段差の有無の違いを周波数領域で比較しても，さほど大きな違いは見られない。段差無のほうが 6 次以上のピークが大きく現れてはいるが，低次のピークについてはほぼ同じ大きさである。また，ピーク周波数についてはどちらもほぼ同じである。

しかし，図 11，12 の反射関数を見るとその違いは一目瞭然である。ベルからの反射 (8msec 付近) とマウスピース内部での反射 (0.4msec まで) については，段差の有無で違いは見られない。しかし，段差有のモデルでは，0.5msec 付近の部分にマウスピース先端部からの反射が大きく現れているのが分かる。

4　発音シミュレーション

ここまでに求めた反射関数と唇の振動モデルを用いて，発音シミュレーションを行う (図 13 参照)。

シミュレーションには足立・佐藤による唇の縦振動モデル [7] を用いた。

$$p_0 - p_{\mathrm{lip}} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{U}{S_{\mathrm{lip}}}\right)^2 + \frac{\rho d}{S_{\mathrm{lip}}}\frac{\partial U}{\partial t} \tag{13}$$

$$p_{\mathrm{lip}} - p = -\rho U^2\left(\frac{1}{S_{\mathrm{cup}}S_{\mathrm{lip}}} - \frac{1}{S_{\mathrm{cup}}^2}\right) \tag{14}$$

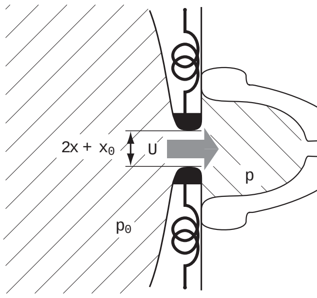

図 13: 唇周辺のモデル化

表 1: シミュレーションに用いたパラメータ [7][8]

$S_{\rm cup}$	MP 入力端の断面積	内部形状からの値
b	唇の隙間の幅	8.0×10^{-3} m
d	唇の厚さ	2.0×10^{-3} m
x_0	唇振動の中心までの距離	グラフ中に記載
Q	唇の Q 値	5.0
$f_{\rm lip}$	唇の共振周波数	グラフ中に記載
m	唇の質量	$1.5/\left[(2\pi)^2 f_{\rm lip}\right]$ kg
k	唇の共振周波数	$1.5 f_{\rm lip}$ N/m
p_0	吹奏圧	グラフ中に記載

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{mk}}{Q} \quad \frac{dx}{dt} + bdp_{\rm lip} - kx \\ -\frac{\sqrt{mk}}{Q} \quad \frac{dx}{dt} + bdp_{\rm lip} - k\left(3x + x_0\right) \end{cases} \tag{15}$$

$$S_{\rm lip} = \max\left\{b\left[2x + x_0\right], 0\right\} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} p(t) &= Z_c U(t) \\ &\quad + \int_0^\infty r(\tau)\left[Z_c U(t-\tau) + p(t-\tau)\right] \mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{17}$$

式 (15) は, 上下の唇が離れている/閉じているときの場合分けで，閉じているとき (式 (15) 下) では，復元力が $3x+x_0$ に比例し，開いているとき (式 (15) 上) より大きな復元力が働くことになる。

これらの式を差分法で解いていき，マウスピース内音圧 $p(t)$，体積流量 $U(t)$，唇の変位 $x(t)$，上下の唇の間の圧力 $p_{\rm lip}(t)$，唇の開口面積 $S_{\rm lip}(t)$ を得る。計算の時間刻みは 10.42μsec(サンプリング周波数 96kHz) で行った。

パラメータは，吹奏圧については N. Fletcher の論文 [8] を元に範囲を定め，他のものについては足立・佐藤の論文 [7] で使われている値を用いた。

4.1 計算結果

シミュレーションは吹奏圧を時間変化させずに一定にしたものと，時間とともに徐々に上げていくものの 2 パターンを行った。

4.1.1 吹奏圧を一定

図 14，15 に吹奏圧 p_0 を時間変化させずに一定にした場合のマウスピース内音圧 $p(t)$ を示す。

吹奏圧 p_0，唇の共振周波数 $f_{\rm lip}$，唇振動の中心までの距離 x_0 は低次モードで発音するものから高次モードで発音するものまで 33 の組み合わせを適宜選んで計算した。ここには一例のみを示す。($p_0 =$ 2[kPa]，$x_0 = 0.4$[mm]，$f_{\rm lip} = 220$[Hz]，発音した周波数 $f_{\rm sound}$ はともに 213.9Hz)

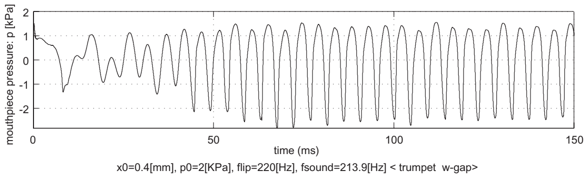

図 14: 段差有

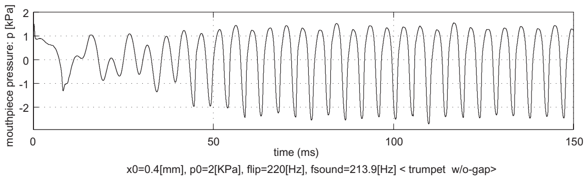

図 15: 段差無

4.1.2 吹奏圧を徐々に上げる

図 16，17 に時間とともに吹奏圧を 0 から徐々に上げていく場合の吹奏圧 $p_0(t)$(破線) とマウスピース内音圧 $p(t)$(実線) を示す。図 18 は段差有/無の 2 つのグラフを重ねて拡大したものである (実線が段差有，破線が段差無)。

唇の共振周波数 $f_{\rm lip}$，唇振動の中心までの距離 x_0 は，低次モードで発音するものから高次モードで発音するものまで 4 つの組み合わせを適宜選んで計算した。では一例を示す。(x_0=0.4[mm]，$f_{\rm lip}$=260[Hz]，発音した周波数 $f_{\rm sound}$ はともに 213.9Hz)

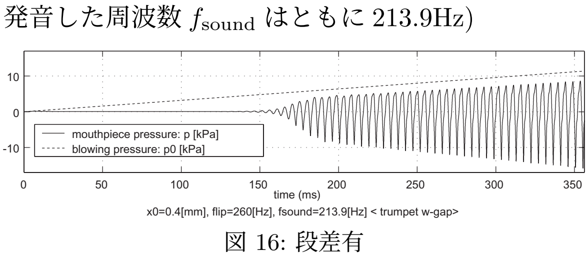

図 16: 段差有

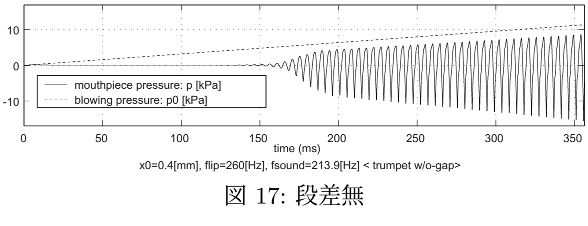

図 17: 段差無

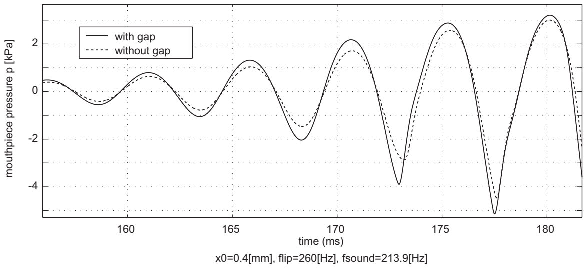

図 18: 段差有/無のマウスピース内音圧

反射関数の発音シミュレーションへの影響は，ベル部分での反射が支配的であり，段差のあるなしでは発振周波数にはほとんど違いが見られない。違いのなさ，というのは特に一定の吹奏圧のときに顕著である。しかし，吹奏圧を 0 からあげていく場合，段差有のモデルを使ったときのほうが，若干ではあるが振動の成長が早くなっている (図 18 参照)。

このことの理由としては，次のようなことが考えられる。金管楽器の場合，管長が長いためベルからの反射が唇に達するまでは，唇は単独で発音したい周波数付近の振動を保持する必要がある。例えば，トランペットでは，発音したい音が第 4 倍音の $B^\flat$(466.2Hz) のとき 1 周期は約 2.1msec であるのに対し，管長 1.37m を往復するには 7.8msec かかり，3.6 周期は唇単独で振動し続けることになる。しかし，この例は反射はベルからだけであると考えた場合であって，反射関数の初め前半部分にマウスピースや段差からの反射がある場合では，少し違う挙動をするであろう。初期の段階で唇がベル以外の何かからの反射のエネルギーを捉えることができるかどうかが，振動の開始や成長に影響を及ぼしていると考えられる。

よって，段差による反射関数の違いは，定常の吹奏状態に大きな影響を与えるものではないが，音の立ち上がりにはある程度の影響を与えている，といえる。

5　まとめ

本研究では，反射関数を使った金管楽器の物理モデルを用いて発音シミュレーションを行なうことで，管内の不連続性の影響を検討した。

周波数領域の入力インピーダンスの形式でなく，時間領域の反射関数の形式で考えると，管内形状の細かい部分が検討しやすいことが確認できた。

段差などの管内形状の細かい部分は，楽器としての性質を決定するような性質のものではないが，音の立ち上がりには影響を与えていることが分かった。

今回は反射関数を管内形状から計算で求めたわけであるが，実際の楽器での反射関数を得るために，Keefe[9] の方法で反射関数の時間領域での測定を試みた。

この方法の利点は，測定装置が小規模で済むことであるが，計算過程は複雑で，逆畳み込み処理がネックとなり信頼に足る反射関数を得るところまでは至らなかった。

今回の結果は，管内の段差を模擬してみた訳であるので，実際の楽器の反射関数を測定し，シミュレーション結果との対応を検討する必要がある。

参考文献

[1] M. E. McIntyre, R. T. Scshumacher, and J. Woodhouse. On the oscillations of musical instruments. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 74, pp. 1325–1345, 1983.

[2] N. H. フレッチャー, T. D. ロッシング. 楽器の物理学. シュプリンガー・フェアラーク東京, 2002. 岸憲史，久保田秀美，吉川茂 訳.

[3] ボブ・マローン・インタビュー. パイパーズ, Vol. 248, pp. 26–31, April 2002.

[4] René Caussé, J. Kergomard, and X. Lurton. Input impedance of brass musical instruments – comparison between experiment and numerical models. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1984.

[5] H. Levine and J. schwinger. On the radiation of sound from an unflanged circular pipie. *Phys. Rev.*, Vol. 73, No. 4, pp. 383–406, 1948.

[6] Gregor Widholm (University for Music, Performing ArtsVienna) 他. BIAS (brass instrument analysis system).

[7] Seiji Adachi and Masa-aki Sato. Time-domain simulation of sound production in the brass instrument. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1995.

[8] N. H. Fletcher and A. Tarnopolsky. Blowing pressure, power, and spectrum in trumpet playing. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1999.

[9] Douglas H. Keefe, Robert Ling, and Jay C. Bulen. Method to measure acoustic impedance and reflection coefficient. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1992.