

デジタル直線の幾何学的特性に基づいた $\gamma - \omega$ Hough変換の高精度化

関 真規人 和田 俊和 松山 隆司  
岡山大学 工学部 情報工学科

我々が以前提案した $\gamma - \omega$  Hough 変換は、通常の  $\rho - \theta$  Hough 変換と比べ次のような優れた特長を持っている。

- (a) パラメータ空間を均一に標準化し全画素からの投票を行なっても、パラメータ空間に蓄積される投票度数に偏りが生じない。
- (b) 投票軌跡が2本の線分から成る折れ線となり、軌跡の描画やパラメータ空間を用いた直線の幾何学的性質の解析が容易に行なえる。

しかし、従来の $\gamma - \omega$  Hough 変換アルゴリズムでは、1本のデジタル直線に含まれる画素集合からの投票がパラメータ空間中の複数のセル（標準化区間）に分散することがあり、デジタル直線を構成する画素の数が投票度数として正しく捉えられないという問題点がある。これは、従来の $\gamma - \omega$  Hough 変換アルゴリズムが、画像空間中に存在する全てのデジタル直線を検出対象としていなかったことに起因する。本研究では、デジタル直線の幾何学的性質を詳細に解析し、画像空間中に存在する全てのデジタル直線と1対1に対応したセル配置を持つように $\gamma - \omega$  パラメータ空間を標準化する方法を求めるとともに、そのセル配置に対する妥当な投票方法を明らかにする。本論文で提案するセル配置と投票方法を用いた「高精度 $\gamma - \omega$  Hough 変換アルゴリズム」を用いることにより、任意の方向、位置を持つデジタル直線が安定かつ高精度に検出できる。

High Precision  $\gamma - \omega$  Hough Transformation Algorithm to Detect Arbitrary Digital Lines

Makito SEKI Toshikazu WADA Takashi MATSUYAMA  
Department of Information Technology, Faculty of Engineering  
Okayama University  
3-1-1 Tsushima Naka, Okayama 700, JAPAN

$\gamma - \omega$  Hough transform, which we proposed before, has the following advantages over the ordinary  $\rho - \theta$  Hough transform:

- (a) The  $\rho - \theta$  parameter space involves the inherent bias, i.e. the uneven sensitivity to directions of straight lines. In the  $\gamma - \omega$  space this bias is completely eliminated.
- (b) A voting curve in the  $\gamma - \omega$  space is a piece-wise linear line consisting of two segments. This enables the fast voting as well as facilitates the analysis of geometric properties of straight lines.

In practice, however, the  $\gamma - \omega$  Hough transformation algorithm involves a crucial problem: votes from those pixels on the same digital line are not always accumulated into a single cell, quantized unit, in the parameter space and hence spread over several neighboring cells. The essential cause of this problem is that the set of cells in the  $\gamma - \omega$  space does not represent all possible digital lines in an image.

In this paper, we first analyze detailed geometric properties of digital lines and propose a new quantization method, i.e. cell configuration, of the  $\gamma - \omega$  space. In this cell configuration, all possible digital lines have one-to-one correspondence to the set of cells. Then, considering the uncertainty range of vote from a pixel, a new voting method is proposed. We call the Hough transformation algorithm incorporating these new cell configuration and voting method "high precision  $\gamma - \omega$  Hough transformation algorithm". Experimental results have demonstrated that digital lines of arbitrary orientations and locations can be correctly detected by the high precision  $\gamma - \omega$  Hough transformation algorithm.

# 1 まえがき

本論文では、我々が以前提案した  $\gamma$ - $\omega$  Hough 変換アルゴリズム [1] を改良し、可能な全てのデジタル直線（厳密な定義は後に与える）を互いに区別して精度の高い直線検出を行なうことができる高精度  $\gamma$ - $\omega$  Hough 変換アルゴリズムを構成する方法について述べる。以下では、連続空間における  $\gamma$ - $\omega$  Hough 変換の概略、デジタル直線検出のための  $\gamma$ - $\omega$  Hough 変換アルゴリズム、すなわちパラメータ空間の標本化法と画素からの投票法を説明し、その問題点を明らかにする。

## 1.1 $\gamma$ - $\omega$ Hough 変換

連続空間における  $\gamma$ - $\omega$  Hough 変換は以下のようにして構成される。

直線検出用 Hough 変換として一般的に用いられている  $\rho$ - $\theta$  Hough 変換 [2] は、画像空間中の特徴点  $(x_0, y_0)$  から、次式によって定義される  $\rho$ - $\theta$  パラメータ空間中の点集合  $(\rho(\theta), \theta)$  に対して投票を行なうものである。

$$\rho(\theta) = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta \quad (1)$$

本研究では、画素を連続画像空間における正方領域と考え、アナログ直線に対応して決まる画素集合をデジタル直線と呼ぶ。デジタル直線は、図 1 に示すように、画素の内部中央に水平もしくはは垂直の基準線を設けたとき、以下の条件を満足する画素集合である。

- $-\pi/4 \leq \theta < \pi/4$  の場合、アナログ直線と交わる水平な基準線を持つ画素の集合
- $\pi/4 \leq \theta < 3\pi/4$  の場合、アナログ直線と交わる垂直な基準線を持つ画素の集合

$\rho$ - $\theta$  Hough 変換では、パラメータ空間を均一に標本化すると、同数の画素から構成されるデジタル直線からの投票度数が直線の角度に依存して変化することが知られている [3]。 $\gamma$ - $\omega$  パラメータ空間は、この問題を解決するために  $\rho$ - $\theta$  パラメータ空間を非線形に変換したパラメータ空間であり、 $\rho$  の代わりに導入された  $\gamma$  パラメータと、 $\theta$  の代わりに導入された  $\omega$  パラメータから成る。

$\rho$ - $\theta$  パラメータ空間において、角度  $\theta$  を持つ互いに素に隣接するデジタル直線に対応する  $\rho$  の間隔は、 $\max(|\sin \theta|, |\cos \theta|)$  となる [1]。 $\gamma$  パラメータはこの間隔が  $\theta$  に依存せず一様になるように導入されたものであり、次式によって定義される。

$$\gamma = \frac{\rho}{\max(|\sin \theta|, |\cos \theta|)} \quad (2)$$

一方  $\omega$  パラメータは、 $\theta = \theta(\omega)$  としたとき、 $-\pi/4 \leq \theta < \pi/4$  および  $\pi/4 \leq \theta < 3\pi/4$  の各区間において投票軌跡の傾き  $\theta_{\gamma/\omega}$

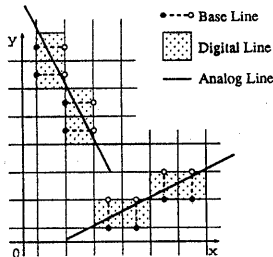


図 1: アナログ直線によって決定されるデジタル直線

がそれぞれ一定、すなわち投票軌跡が直線となるように導入されたパラメータであり、次式によって定義される。

$$\omega = \begin{cases} \frac{\tan(\theta)}{\alpha}, & (-\pi/4 \leq \theta < \pi/4) \\ \frac{\tan(\theta - \pi/2)}{\alpha} + 2, & (\pi/4 \leq \theta < 3\pi/4) \end{cases} \quad (3)$$

但し、定数  $\alpha$  は、直線の角度分解能を決める係数である。

$\gamma$ - $\omega$  パラメータ空間に投票軌跡を描く場合、特徴点  $(x_0, y_0)$  から  $\rho, \theta$  を求め、それらから上記の定義式を用いて  $\gamma, \omega$  の値を計算するといった間接的計算を行なう必要はなく、次式によって投票軌跡  $(\gamma(\omega), \omega)$  を直接計算することができる。

$$\gamma(\omega) = \begin{cases} x_0 + \alpha \omega y_0, & (-\frac{1}{\alpha} \leq \omega < \frac{1}{\alpha}) \\ y_0 + (2 - \alpha \omega) x_0, & (\frac{1}{\alpha} \leq \omega < \frac{3}{\alpha}) \end{cases} \quad (4)$$

逆に言うと、 $\gamma$ - $\omega$  パラメータ空間中の点  $(\gamma_0, \omega_0)$  は次式によって表される画像空間中のアナログ直線に対応している。

$$\begin{cases} x = -\alpha \omega_0 y + \gamma_0, & (-\frac{1}{\alpha} \leq \omega_0 < \frac{1}{\alpha}) \\ y = (\alpha \omega_0 - 2)x + \gamma_0, & (\frac{1}{\alpha} \leq \omega_0 < \frac{3}{\alpha}) \end{cases} \quad (5)$$

以上のように構成された  $\gamma$ - $\omega$  Hough 変換は、

- $\gamma$ - $\omega$  パラメータ空間を均一に標本化し全画素からの投票を行なっても、パラメータ空間に蓄積される投票度数に偏りが生じない
- 投票軌跡が 2 本の線分からなる折れ線となり、軌跡の描画や、パラメータ空間を用いた直線の幾何学的性質の解析が容易に行なえる

という特長を持っている。

## 1.2 $\gamma$ - $\omega$ Hough 変換アルゴリズムとその問題点

デジタル画像処理のための  $\gamma$ - $\omega$  Hough 変換アルゴリズムを構成するには、投票度数を蓄積するための「セル」をパラメータ空間に配置し、そのセルに対する投票方法を明らかにする必要がある。文献 [1] では、 $\gamma$ - $\omega$  Hough 変換アルゴリズムを構成するための手がかりとして、 $\gamma$ - $\omega$  Hough 変換に関する以下の性質が述べられている。

【性質 1】パラメータ  $(\gamma_0, \omega_0)$  と  $(\gamma_0 + 1, \omega_0)$  を持つアナログ直線によって決まる 2 つのデジタル直線は、画像空間中で隣接しており、互いに素である。これは、任意の  $\omega$  において  $\gamma = \gamma_0, \gamma_0 \pm 1, \gamma_0 \pm 2, \dots$  ( $\gamma_0$  は任意の定数) のパラメータを持つアナログ直線集合を考えると、それらによって決まるデジタル直線集合が画像空間を直和分割することを意味している。

【性質 2】任意の  $\omega$  において、画素からの投票は  $\gamma$  軸方向に幅 1 の不確定性を持つ。すなわち、画素を正方領域と考えているため、ある画素を通るアナログ直線は  $\omega$  を固定してもユニークには決定できない。

文献 [1] では、【性質 1】に基づき、各  $\omega$  において画像空間を直和分割するデジタル直線集合とセル集合が 1 対 1 に対応するように  $\gamma$  軸を標本化し、以下のようにして投票を行なった。

### 【 $\gamma$ - $\omega$ Hough 変換アルゴリズム】

まず  $\omega$  方向は間隔 1 で標本化する。検出できるデジタル直線の角度分解能は定数  $\alpha$  によって決まり、通常は  $(2M + 1) \times (2M + 1)$  のデジタル画像に対して  $\alpha = 1/(2M + 1)$  あるいは  $\alpha = 1/M$  とする。標本化された各  $\omega_i$  において、 $\gamma = \gamma_0, \gamma_0 \pm 1, \gamma_0 \pm 2, \dots$  を中心とする幅 1 のセルを  $\gamma$  軸方向に配置し、各特徴点画素の中心座標から計算される投票軌跡が通過するセルの投票度数を 1 増やす。 $\gamma_0$  は任意であるので全ての  $\omega_i$  に対して 0 とする。

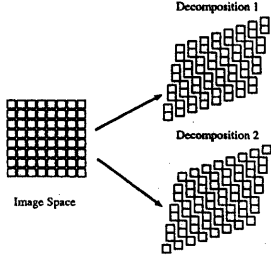


図 2: デジタル直線による画像空間の直和分割の多様性

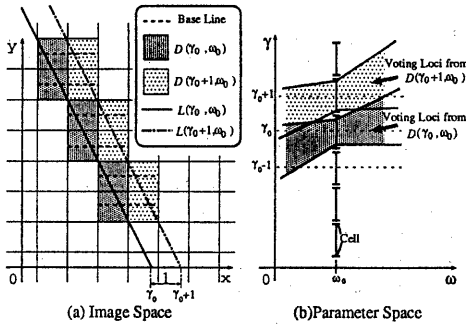


図 3:  $\gamma_0 \pm n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  を中心とするセルと対応するデジタル直線からの投票

しかし、一般に  $\omega = \omega_0$  において、 $\gamma = \gamma_0, \gamma_0 \pm 1, \dots$  というパラメータを持つデジタル直線集合は全てのデジタル直線集合（互いに素とは限らない）を表しているわけではなく、これら以外にも  $\omega_0$  をパラメータとして持つデジタル直線が多数存在する。言い換えると、一般に  $\omega = \omega_0$  において、パラメータ  $\gamma = \gamma_0, \gamma_0 \pm 1, \dots$  を持つデジタル直線集合以外にも画像を直和分割するデジタル直線集合が存在し（図 2）、それらはパラメータ  $\gamma = \gamma_0 + \epsilon, \gamma_0 + \epsilon \pm 1, \gamma_0 + \epsilon \pm 2, \dots$  ( $0 < \epsilon < 1$ ) を持つ。

以上のことから、上記の  $\gamma - \omega$  Hough 変換アルゴリズムにおけるセル配置は、画像空間中に存在する全てのデジタル直線を検出対象としたものとはなっていないことが分かる。このため、セルに対応するデジタル直線に含まれる画素からの投票は、正しくセルに蓄積される（図 3）が、セルに対応しないデジタル直線に含まれる画素からの投票は、複数のセルに分散してしまう（図 4）。こうした投票の分散は、デジタル直線を構成する画素の数が投票度数として正しく捉えられないという大きな問題を引き起こす。さらに、上記の  $\gamma - \omega$  Hough 変換アルゴリズムにおける投票法は、[性質 2] で示された画素からの投票の不確定性を正確に反映したもとはなっておらず、この点からもアルゴリズムの再検討が必要である。

本論文では、まず連続空間を対象として、各  $\omega$  における

- デジタル直線とそれに対応するアナログ直線の関係
- 画素からの投票の不確定性

について詳細な解析を行ない、画像空間中に存在する全てのデジタル直線と 1 対 1 に対応するセル配置を求めるとともに、そのセル配置に対する妥当な投票方法を明らかにする。本論文で提案するセル配置と投票法を用いた「高精度  $\gamma - \omega$  Hough 変換アルゴリズム」を用いることによって、任意の方向、位置を持つデジタル直線に含まれる画素からの投票が 1 つのセルに完全に蓄積されることが保証され、安定で精度の高い直線検出が実現できる。

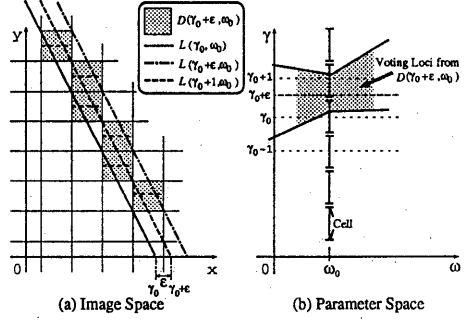


図 4:  $\gamma_0 \pm n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  を中心とするセルに対応しないデジタル直線からの投票

以下では、まず 2 章において議論で用いる用語の定義を行ない、3 章では、デジタル直線の性質を解析し、全てのデジタル直線に対応したセル配置を求める。4 章では、求めたセル配置に対する妥当な投票方法を明らかにし、高精度  $\gamma - \omega$  Hough 変換アルゴリズムを構成する。5 章では、通常の  $\rho - \theta$  Hough 変換アルゴリズム、前述の  $\gamma - \omega$  Hough 変換アルゴリズム、高精度  $\gamma - \omega$  Hough 変換アルゴリズムを用いて直線検出実験を行ない、直線の検出感度と精度によって各アルゴリズムの性能を比較する。

## 2 定義

以下の議論では、2 次元 Euclid 空間を  $E^2$  で表す。

[定義 1] 画像空間 正の整数  $M$  によって決まる  $(2M + 1) \times (2M + 1)$  の大きさを持つ  $E^2$  中の正方領域を画像空間と呼び、 $P$  で表す。

$$P = \{(x, y) \in E^2 \mid -M - \frac{1}{2} \leq x, y < M + \frac{1}{2}\} \quad (6)$$

[定義 2] 画素 整数の座標値  $(X, Y)$  で表される点を中心とした画像空間中の  $1 \times 1$  の大きさの正方領域を、座標値  $(X, Y)$  を持つ画素と呼び、 $p(X, Y)$  で表す。

$$p(X, Y) = \{(x, y) \in P \mid X - \frac{1}{2} \leq x < X + \frac{1}{2}, Y - \frac{1}{2} \leq y < Y + \frac{1}{2}\} \quad (7)$$

[定義 3] アナログ直線 画像空間中の点の集合  $L(\gamma, \omega)$  をパラメータ  $\gamma, \omega$  をもつアナログ直線と呼ぶ。

$$L(\gamma, \omega) = \begin{cases} \{(x, y) \in P \mid x = -\alpha\omega y + \gamma, \\ \quad (-\frac{1}{\alpha} \leq \omega < \frac{1}{\alpha})\}, \\ \{(x, y) \in P \mid y = (\alpha\omega - 2)x + \gamma, \\ \quad (\frac{1}{\alpha} \leq \omega < \frac{3}{\alpha})\} \end{cases} \quad (8)$$

[定義 4] デジタル直線 画素集合  $D(\gamma, \omega)$  をアナログ直線  $L(\gamma, \omega)$  によって選択されるデジタル直線と呼ぶ。

$$D(\gamma, \omega) = \begin{cases} \{p(X, Y) \mid X - \frac{1}{2} \leq -\alpha\omega Y + \gamma < X + \frac{1}{2}, \\ \quad (-\frac{1}{\alpha} \leq \omega < \frac{1}{\alpha})\}, \\ \{p(X, Y) \mid Y - \frac{1}{2} \leq (\alpha\omega - 2)X + \gamma < Y + \frac{1}{2}, \\ \quad (\frac{1}{\alpha} \leq \omega < \frac{3}{\alpha})\} \end{cases} \quad (9)$$

### 3 全デジタル直線に対応した高精度セル配置法

ここでは、アナログ直線とデジタル直線の相互関係を詳細に分析し、画像空間中に存在する全てのデジタル直線と1対1に対応する $\gamma-\omega$ パラメータ空間上のセル配置を求める。

高精度 $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズムにおけるパラメータ空間の標準化に対する基本的考え方は、1.2で述べた $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズムと同様のものである。すなわち、

(a) $\omega$  方向の標準化間隔は、検出できるデジタル直線の角度分解能を定めるだけであるので、一定間隔で標準化を行う。

(b) $\gamma$  方向の標準化に関しては、各標準化された $\omega_i$ において、 $\gamma$  軸方向のある幅を持った区間に区切り、各区間を投票度数を蓄積するためのセルと考える。

このため、以下の議論では $\omega$ パラメータは $-1/\alpha \leq \omega_0 < 1/\alpha$  を満足するある $\omega_0$ に固定して考える。(1/ $\alpha \leq \omega_0 < 3/\alpha$ の場合も同様の議論が成り立つ。)また、議論を簡単にするために画像空間は無限に大きいものとする。

#### 3.1 アナログ直線とデジタル直線の関係

パラメータ $\omega_0$ を持つあるアナログ直線 $L(\gamma_0, \omega_0)$ によって選択されるデジタル直線は、定義4から

$$D(\gamma_0, \omega_0) = \{p(X, Y) | X - \frac{1}{2} \leq -\alpha\omega_0 Y + \gamma_0 < X + \frac{1}{2}\} \\ = \{\dots, p(X(Y_1), Y_1), p(X(Y_2), Y_2), \dots\} \quad (10)$$

という画素集合として表される。ただし

$$X(Y_i) = [-\alpha\omega_0 Y_i + \gamma_0 + \frac{1}{2}], \quad Y_i \in \mathbf{Z} \quad (11)$$

である。ここで $[\ ]$ はガウス記号、 $\mathbf{Z}$ は整数の集合を表す。

逆に、この画素集合をデジタル直線として選択するアナログ直線を考えると、定義4からそのパラメータ $\gamma$ は以下の不等式群を満足しなければならない。

$$\begin{aligned} & \vdots \\ X(Y_1) + \alpha\omega_0 Y_1 - \frac{1}{2} & \leq \gamma < X(Y_1) + \alpha\omega_0 Y_1 + \frac{1}{2} \\ X(Y_2) + \alpha\omega_0 Y_2 - \frac{1}{2} & \leq \gamma < X(Y_2) + \alpha\omega_0 Y_2 + \frac{1}{2} \\ & \vdots \end{aligned} \quad (12)$$

すなわち、

$$\max_{Y_i} (X(Y_i) + \alpha\omega_0 Y_i - \frac{1}{2}) \leq \gamma < \min_{Y_i} (X(Y_i) + \alpha\omega_0 Y_i + \frac{1}{2}) \quad (13)$$

この式より、 $\gamma$ の可能な変動幅は、以下のように $\mu(\gamma_0, \omega_0)$ によって表すことができる。

$$\mu(\gamma_0, \omega_0) = \min_{Y_i} (X(Y_i) + \alpha\omega_0 Y_i + \frac{1}{2}) \\ - \max_{Y_i} (X(Y_i) + \alpha\omega_0 Y_i - \frac{1}{2}) \quad (14)$$

$\mu(\gamma_0, \omega_0)$ は、デジタル直線 $D(\gamma_0, \omega_0)$ を選択するアナログ直線 $L(\gamma, \omega_0)$ の $\gamma$ パラメータの可能な変動区間の大きさを表している。この区間をデジタル直線に対応する「アナログ直線の不確定区間」と呼ぶ。

付録1、2に示すように、 $\mu(\gamma_0, \omega_0)$ の値は以下ようになる。

[ $\alpha\omega_0$ が有理数の場合]

$\alpha\omega_0$ を $n/m$ とすると、

$$\mu(\gamma_0, \omega_0) = \frac{1}{m} \quad (15)$$

となる。ただし、 $m$ は正整数、 $n$ は整数で $n/m$ は既約分数、 $\alpha\omega_0 = 0$ の既約分数は $0/1$ と考える。(証明は付録1に示す。)

[ $\alpha\omega_0$ が無理数の場合]

$\mu(\gamma_0, \omega_0)$ は極限として0となる。(証明は付録2に示す。)

$\alpha\omega_0$ が無理数である場合には、 $\mu(\gamma_0, \omega_0)$ が0に収束するのは、画像空間として無限の空間を考えているためである。

以上のことから次のことが言える。

[特徴1]  $\alpha\omega_0$ が有理数の場合には、アナログ直線からデジタル直線への写像はユニークであるが、その逆写像には不確定性があり、1つのデジタル直線に対して多数のアナログ直線が対応する。

[特徴2]  $\alpha\omega_0$ が無理数の場合、画像空間が無限に大きいものと考え、アナログ直線とデジタル直線は1対1に対応付けられる。

[特徴3]  $\mu(\gamma_0, \omega_0)$ の値は $\gamma_0$ には依存せず、各 $\omega_0$ において一定の値をとる。このため、以下ではアナログ直線の不確定区間の幅を $\mu(\omega_0)$ と表す。

#### 3.2 アナログ直線の不確定区間

ここでは $\gamma-\omega$ パラメータ空間中の直線 $\omega = \omega_0$ 上におけるアナログ直線の不確定区間とセルとの関係、不確定区間どうしの位置関係を明らかにする。

まず、任意のアナログ直線は必ず1つのデジタル直線を選択することから、次のことが言える。

[特徴4] デジタル直線に対応するアナログ直線の不確定区間は、 $\gamma-\omega$ パラメータ空間中の直線 $\omega = \omega_0$ 上で互いに重なることなく隣接していなければならない。言い換えると、 $\omega = \omega_0$ の直線上の不確定区間と画像空間中の傾き $\omega_0$ のデジタル直線は1対1に対応する。このことより、 $\gamma-\omega$ パラメータ空間中の直線 $\omega = \omega_0$ 上において、各デジタル直線に対応するアナログ直線の不確定区間をそれぞれセルとすれば、全てのデジタル直線に1対1に対応したセル配置が得られることになる。

アナログ直線とデジタル直線が1対1に対応付けられる $\alpha\omega_0$ が無理数の場合を考えると、 $\mu(\omega_0) = 0$ であるので、 $\omega = \omega_0$ の直線上に幅0のセルを実数濃度で配置しなければならない。デジタル直線に1対1に対応したセル配置を実現するのは不可能となる。しかし、実際の画像空間の大きさは有限であり、そこに含まれる任意のデジタル直線は $\alpha\omega_0$ が有理数のアナログ直線によって選択できることが分かっている[1]。(具体的方法は後述する。)すなわち、 $\alpha$ を有理数としパラメータ空間の $\omega$ 軸方向を有理点で標準化しても、有限の画像空間中に存在する全てのデジタル直線に1対1に対応したセル配置を実現することができる。この場合、 $\omega$ の各標準化点 $\omega_i$ において $\alpha\omega_i$ が有理数となるためセル幅は0とはならず、画像空間の大きさから $\gamma$ パラメータの範囲も限定できるので、 $\gamma$ 軸方向に有限個のセルを配置することによってパラメータ空間の標準化が行なえる。したがって、以降は $\alpha\omega_0$ は有理数であるものとして議論を行なう。

次に、アナログ直線 $L(-1/2, \omega_0)$ によって選択されるデジタル直線 $D(-1/2, \omega_0)$ を考えると、 $L(-1/2, \omega_0)$ が画素 $p(0, 0)$ の基準線の左端点を通る(図5)。このことから、

[特徴5]  $D(-1/2, \omega_0)$ に対応するアナログ直線の不確定区間は、

$$-\frac{1}{2} \leq \gamma < -\frac{1}{2} + \mu(\omega_0) \quad (16)$$

と表され、 $D(-1/2, \omega_0)$ を表す $\omega = \omega_0$ の直線上のセルは、 $\gamma = -1/2$ から始まる幅 $\mu(\omega_0)$ の区間となる。

以上述べた特徴3、4、5より、傾き $\omega_0$ の任意のデジタル直線に対応するアナログ直線の不確定区間(セル)は、次のよう

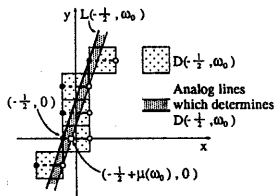


図 5:  $D(-1/2, \omega_0)$  に対応するアナログ直線の不確定区間

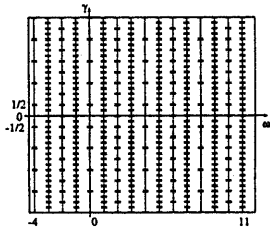


図 6: 高精度セル配置法 ( $\alpha = 1/4$  の場合)

に表される。

$$-\frac{1}{2} + k\mu(\omega_0) \leq \gamma < -\frac{1}{2} + (k+1)\mu(\omega_0), \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (17)$$

これまでの議論は全て  $1/\alpha \leq \omega_0 < 3/\alpha$  に対しても同様に成り立つ。

### 3.3 セルの配置法

以上の議論から、 $\omega$  方向が、

$$\omega_j = -\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\alpha} + 1, -\frac{1}{\alpha} + 2, \dots, \frac{3}{\alpha} - 1 \quad (18)$$

と標準化されている場合、画像空間中に存在する全てのデジタル直線に 1 対 1 に対応するセルを  $\gamma-\omega$  パラメータ空間上に配置する方法は次のようになる。

**[定義 5] 高精度セル配置法** 各  $\omega_j$  に対して、 $\gamma-\omega$  パラメータ空間中の直線  $\omega = \omega_j$  上に、

$$\gamma_i = -\frac{1}{2} + (i + \frac{1}{2})\mu(\omega_j), \quad (i \in \mathbb{Z}) \quad (19)$$

を中心とした幅  $\mu(\omega_j)$  の区間

$$c(\gamma_i, \omega_j) = \{(\gamma, \omega_j) \mid \gamma_i - \frac{\mu(\omega_j)}{2} \leq \gamma < \gamma_i + \frac{\mu(\omega_j)}{2}\} \quad (20)$$

を設け、それらをセルとする。

この定義に基づくセル配置の例を図 6 に示す。この図から分かるように、セルの幅  $\mu(\omega_j)$  は  $\omega_j$  に依存して変化する。すなわち、以前提案した  $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズムでは、 $\omega$  方向だけでなく  $\gamma$  方向にも一様な標準化を行っていたが、ここで提案する高精度  $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズムでは、 $\omega$  に依存して  $\gamma$  方向の標準化間隔を変化させることになる。

$\alpha$  の値は、 $\omega_j$  が式 (18) に示すように標準化されている場合、 $(2M+1) \times (2M+1)$  のデジタル画像に対して

- $\alpha = 1/(2M+1)$  とすれば、画像の向かい合う枠上の任意の画素の組を含むデジタル直線が互いに区別できる角度分解能を持つ。

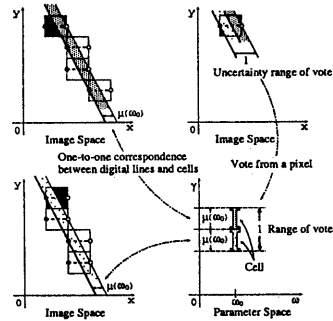


図 7: 投票の不確定区間とセル

- $\alpha = 1/M$  とすれば、画像の枠上の任意の画素と画像中央の原点を含むデジタル直線が互いに区別できる角度分解能を持つ。

という性質を持っている [1] ので、このいずれかの値を用いれば良い。特に、 $\alpha = 1/(2M+1)$  とすれば、画像空間中のデジタル直線は全て表現することができる。この場合、明らかに  $\alpha\omega_j$  は有理数になり  $\mu(\omega_j)$  の値は式 (15) によって計算できる。

## 4 不確実性を考慮した画素からの投票

1.2 で述べた  $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズムでは、検出対象を互いに素なデジタル直線集合に限定していた。このため、各  $\omega_j$  において、1 つの画素が複数のデジタル直線に含まれることはなく、1 つの画素から 1 つのセルに対してのみ投票を行えばよかった。しかし、前章で述べた高精度セル配置を用いて全てのデジタル直線を検出対象とした場合、一般に 1 つの画素が同じ  $\omega$  パラメータを持つ近接した複数のデジタル直線に要素として含まれることになる。したがって、高精度  $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズムを構成するには、各  $\omega_j$  において、注目する画素を含む全てのデジタル直線群を求め、それらに対応した複数のセルに対して投票を行う方法を考えなければならない。

再び  $\omega = \omega_0$  ( $-1/\alpha \leq \omega_0 < 1/\alpha$ ) と  $\omega$  を固定して考える。1.2 の [性質 2] より、ある画素  $p(X, Y)$  からその基準線と交わるアナログ直線  $L(\gamma, \omega_0)$  を求めようとすると、その  $\gamma$  パラメータには次のような幅 1 の不確実性が生じる (図 7 右上)。

$$X + \alpha\omega_0 Y - \frac{1}{2} \leq \gamma < X + \alpha\omega_0 Y + \frac{1}{2} \quad (21)$$

この区間を「投票の不確定区間」と呼ぶ。

画素  $p(X, Y)$  が特徴点として抽出されたということは、上記の不確定区間内のいずれかのアナログ直線が画像中に存在することの証拠となる。したがって、特徴点画素  $p(X, Y)$  からの投票としては、 $\gamma-\omega$  パラメータ空間中の直線  $\omega = \omega_0$  上において、投票の不確定区間と重なりを持つセル集合を求め、それらの値を 1 増やすという方法を採ればよい。

一般に投票の不確定区間とセルとの位置関係は、図 7 右下に示すように、1 つの投票の不確定区間内に複数のセルが完全に含まれるようなものとなる。この理由は以下の通りである。

3.1 の議論において、 $\omega = \omega_0$  におけるセル、すなわちアナログ直線の不確定区間は、式 (12) の不等式で表される区間の積集合として定義された。一方、式 (12) の各区間は、式 (10) のデジタル直線を構成する画素からの投票の不確定区間を表している。このことから、画素  $p(X, Y)$  からの投票の不確定区間は、 $p(X, Y)$  を要素として含むデジタル直線に対応したアナログ直線の不確定区間 (セル) 全てをその部分集合として含むことになる。

投票の不確定区間の幅は 1、セルの幅は  $\mu(\omega_0)$  であるので、 $\omega = \omega_0$  においては、 $p(X, Y)$  からの投票は  $1/\mu(\omega_0)$  個のセルに対し



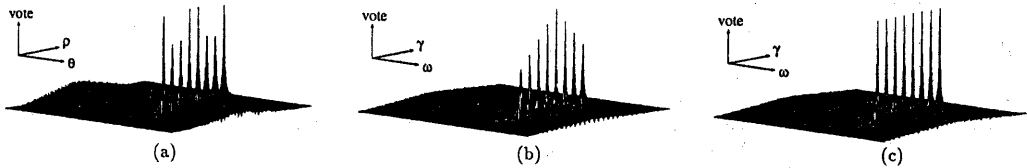


図9: 図8のテスト画像に対する投票度数: (a)  $\rho-\theta$  Hough 変換アルゴリズム、(b)  $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズム、(c) 高精度  $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズム

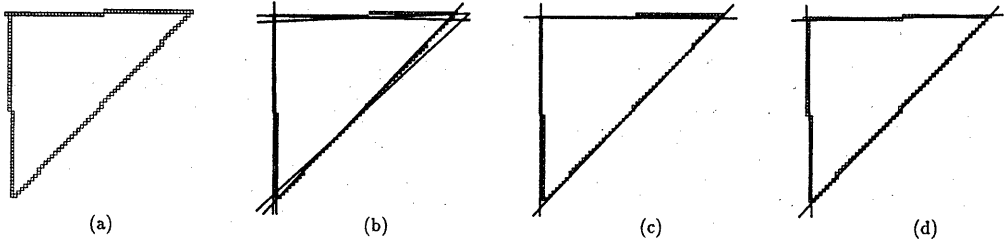


図10: 直線検出実験: (a) テスト画像、(b)  $\rho-\theta$  Hough 変換アルゴリズム、(c)  $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズム、(d) 高精度  $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズム

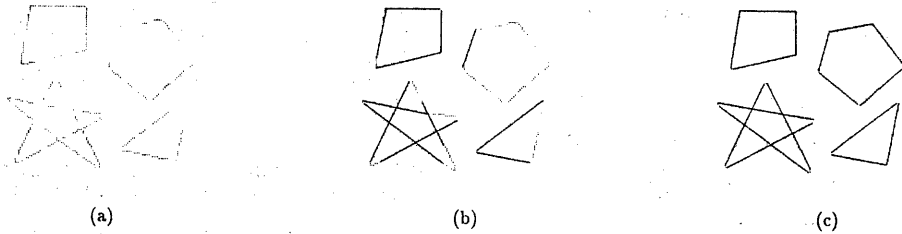


図11: 線分検出実験: (a) テスト画像、(b)  $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズム、(c) 高精度  $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズム

### 5.3 線分検出実験

Hough 変換を用いて線分検出を行なう場合、パラメータ空間中のピークとして抽出した直線上に存在する特徴点画素集合を求め、特徴点画素の密度が高い部分を線分として抽出するという処理を行わなければならない。先に取り上げた直線検出精度の問題は、この処理に大きな影響を与える。

図11(a)に示される  $128 \times 128$  の2値画像に対して、 $\alpha = 1/64$  として  $\gamma-\omega$ 、高精度  $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズムをそれぞれ適用し、線分検出を行なった結果を同図(b),(c)に示す。線分検出の際には、5.2と同様にして閾値20以上で検出した直線候補に対して、文献[1]で提案した整列検証法を用い、線長20画素以上、線幅1画素、画素密度0.3以上、最大画素間間隔7以下という条件を満足する直線上の区間を抽出した。

同図(b)から分かるように、従来の  $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズムでは直線検出精度が低いため、直線上に存在する特徴点画素集合が画像中のデジタル直線を構成する画素集合の部分集合にしかならず、線分の検出が失敗する場合が多い。これに対して、高精度  $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズムを用いた場合には、直線の検出精度が高く、同図(c)に示すようにほぼ正しい線分が検出される。

## 6 むすび

本論文では、アナログ、デジタル直線の幾何学的性質に基づいて、画像空間中に存在する全てのデジタル直線を検出対象とした「高精度  $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズム」を構成した。これ

によって、我々が[1]で目指した、歪みがなく高精度な Hough 変換を実現するための具体的なアルゴリズムが完成したことになる。

[1]で述べたように、 $\gamma-\omega$  パラメータ空間は文献[4]で提案された  $a-d$  パラメータ空間を特殊な場合として含んでいる。文献[4]では、 $a-d$  パラメータを用いて任意の直線を検出・描画する際のデジタル化誤差の解析が今後の課題として述べられているが、本論文で明らかにしたアナログ直線とデジタル直線の関係、および高精度  $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズムは、まさにこの課題に対する答となっている。

高精度  $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズムは、従来の  $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズムと同様に、「全画素からの投票を行なった場合、パラメータ空間に蓄積される投票度数に偏りが生じない」という無歪性を満足する。一方、 $\omega$  の値に応じて  $\gamma$  方向のセル幅、個数が変化するので、画素からの投票を行なう際の  $\gamma$  パラメータとセル配列のインデックスの変換に要する計算が複雑になり、「投票軌跡が区分的直線であり、高速に投票を行なうことができる」という特長は損なわれてしまう。この問題を解決するために、 $\rho$  パラメータから  $\gamma$  パラメータを導いたときと同様の考え方に基づいて、セル幅が一定となる新たなパラメータ  $\delta$  を  $\gamma$  から導くことが考えられる。しかし、そうした  $\delta$  パラメータを用いると、 $\gamma$  パラメータでは幅1であった投票の不確定区間が  $\omega$  に依存して変化することになり、問題の解決にはならない。

高精度  $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズムでは、デジタル直線を構成する画素数とピークの高さが完全に一致することが保証され、従来法よりも精度の高い直線検出が実現できる。一方、そうした高精度化のためのコストとして、従来の  $\gamma-\omega$  Hough 変換

アルゴリズムと比べて、かなり大量のセル配列が必要となる<sup>1</sup>という効率上の問題が生じる。

実用的な観点からは、必要な直線検出精度、計算時間、記憶容量に応じて従来の  $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズムと高精度  $\gamma-\omega$  Hough 変換アルゴリズムを使い分けたり、両者をうまく組み合わせることにより、小規模なメモリで高精度な直線検出を行なうアルゴリズムを考案することなどが考えられる。今後はこうしたアルゴリズムの効率化について検討を進める予定である。

## 参考文献

- [1] 和田, 藤井, 松山, “ $\gamma-\omega$  Hough 変換”, 信学論, J75-D-II, 1, pp. 21-30, (1992-01)
- [2] Duda, R. O. and Hart, P.E., “Pattern Recognition and Scene Analysis”, Wiley, New York (1973).
- [3] Maitre, H., “Contribution to the prediction of Performances of the Hough Transform”, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., PAMI-8, 5, pp. 669-674, (Sep. 1986).
- [4] Svalbe, I. D., “Natural Representations for Straight Lines and the Hough Transform on Discrete Arrays”, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., PAMI-11, 9, pp. 941-950, (Sep. 1989).
- [5] 日本数学会編: “岩波数学辞典第3版”, pp. 1332-1333, 岩波書店, (1989)

付録1 [ $\alpha\omega_0$  が  $n/m$  ( $m$  は正整数,  $n$  は整数,  $n/m$  は既約分数) で表されるとき,  $\mu(\gamma_0, \omega_0) = 1/m$  が成り立つことの証明 (ただし,  $\alpha\omega_0 = 0$  のときの既約分数は  $0/1$  とする。)]  
 $-1/\alpha \leq \omega_0 < 1/\alpha$  の場合

$$\begin{aligned} \mu(\gamma_0, \omega_0) &= \min_{Y_i} \left\{ [-\alpha\omega_0 Y_i + \gamma_0 + \frac{1}{2}] + \alpha\omega_0 Y_i + \frac{1}{2} \right\} \\ &\quad - \max_{Y_i} \left\{ [-\alpha\omega_0 Y_i + \gamma_0 + \frac{1}{2}] + \alpha\omega_0 Y_i - \frac{1}{2} \right\} \\ &= \min_{Y_i} \left\{ \left( \frac{n}{m} Y_i + \Gamma \right) - \left[ \frac{n}{m} Y_i + \Gamma \right] \right\} \\ &\quad - \max_{Y_i} \left\{ \left( \frac{n}{m} Y_i + \Gamma \right) - \left[ \frac{n}{m} Y_i + \Gamma \right] \right\} + 1 \end{aligned}$$

ただし,  $\alpha\omega_0 = -n/m, \Gamma = \gamma_0 + 1/2$  である。

このとき,  $nY_i/m, \Gamma$  は次に示すように、それぞれ整数部分  $[nY_i/m]$ ,  $\Gamma$  と小数部分  $(nY_i/m \bmod m)/m, \Gamma - [\Gamma]$  に分けることができる。

$$\frac{n}{m} Y_i + \Gamma = \left[ \frac{n}{m} Y_i \right] + \frac{nY_i \bmod m}{m} + [\Gamma] + (\Gamma - [\Gamma])$$

$(nY_i/m + \Gamma) - [nY_i/m + \Gamma]$  は,  $nY_i/m + \Gamma$  の整数部分を取り除いた残りの小数部分であるから、

$$\left( \frac{n}{m} Y_i + \Gamma \right) - \left[ \frac{n}{m} Y_i + \Gamma \right]$$

$$= \begin{cases} \frac{nY_i \bmod m}{m} + \Gamma - [\Gamma], & \left( \frac{nY_i \bmod m}{m} + \Gamma - [\Gamma] < 1 \right) \\ \frac{nY_i \bmod m}{m} + \Gamma - [\Gamma] - 1, & \left( \frac{nY_i \bmod m}{m} + \Gamma - [\Gamma] \geq 1 \right) \end{cases}$$

となる。このとき、下記の補題1より、全ての整数  $Y_i$  に対して、 $nY_i \bmod m$  が、0 から  $m-1$  までの全ての整数値をとるので、実際に、 $nY_i \bmod m$  に 0 から  $m-1$  までの整数値を当てはめて考えると、 $(nY_i/m + \Gamma) - [nY_i/m + \Gamma]$  のとりうる値は以下ようになる。

$$\begin{array}{cc} \frac{0}{m} + \Gamma - [\Gamma] & \frac{R+1}{m} + \Gamma - [\Gamma] - 1 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{R}{m} + \Gamma - [\Gamma] & \frac{m-1}{m} + \Gamma - [\Gamma] - 1 \end{array}$$

ただし、 $R$  は、 $R/m + \Gamma - [\Gamma] < 1, (R+1)/m + \Gamma - [\Gamma] \geq 1$  を満足する正整数 ( $0 \leq R \leq m-1$ )。

$(R+1)/m - 1 < \dots < (m-1)/m - 1 < 0/m < \dots < R/m$  であるので、

$$\begin{aligned} \max_{Y_i} \left( \frac{n}{m} Y_i + \Gamma \right) - \left[ \frac{n}{m} Y_i + \Gamma \right] &= \frac{R}{m} + \Gamma - [\Gamma] \\ \min_{Y_i} \left( \frac{n}{m} Y_i + \Gamma \right) - \left[ \frac{n}{m} Y_i + \Gamma \right] &= \frac{R+1}{m} + \Gamma - [\Gamma] - 1 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>  $128 \times 128$  の画像で  $\alpha = 1/64$  とすると、約 43 倍のセルを必要とする。

が成り立つ。故に

$$\begin{aligned} \mu(\gamma_0, \omega_0) &= \left( \frac{R+1}{m} + \Gamma - [\Gamma] - 1 \right) - \left( \frac{R}{m} + \Gamma - [\Gamma] \right) + 1 \\ &= \frac{1}{m} \end{aligned}$$

また、 $1/\alpha \leq \omega_0 < 3/\alpha$  のときは、 $\alpha\omega_0 = n/m + 2, \Gamma = \gamma_0 + 1/2$  と置くと  $-1/\alpha \leq \omega_0 < 1/\alpha$  の場合と同じく

$$\begin{aligned} \mu(\gamma_0, \omega_0) &= \min_{X_i} \left\{ \left( \frac{n}{m} X_i + \Gamma \right) - \left[ \frac{n}{m} X_i + \Gamma \right] \right\} \\ &\quad - \max_{X_i} \left\{ \left( \frac{n}{m} X_i + \Gamma \right) - \left[ \frac{n}{m} X_i + \Gamma \right] \right\} + 1 \end{aligned}$$

となるので、同様にして  $\mu(\gamma_0, \omega_0) = 1/m$  を証明することができる。

補題1 [全ての整数  $Y_i$  に対して、 $nY_i \bmod m$  が 0 から  $m-1$  までの全ての整数値をとる。ただし、 $m$  は正整数,  $n$  は整数で  $n/m$  は既約分数である (0 の既約分数は  $0/1$  とする。)]

$n = 0$  または  $m = 1$  のとき、補題1は明らかに成り立つので、以下では  $n \neq 0$  かつ  $m \neq 1$  の場合について述べる。

$nY_i \equiv n(Y_i + m) \pmod{m}$  であるので、 $0 \leq Y_i \leq m-1$  を満足する整数  $Y_i$  について考えれば十分である。ここでは、 $0 \leq Y_i \leq m-1$  の異なる任意の整数  $Y_1, Y_2$  ( $Y_1 \neq Y_2$ ) に対して、 $nY_1 \bmod m \neq nY_2 \bmod m$  であることを示し、これによって補題を証明する。

以下に、 $nY_1 \bmod m = nY_2 \bmod m$  として矛盾を導く。このとき、 $nY_1$  を  $m$  で割った時の商を  $q_1$ 、 $nY_2$  を  $m$  で割った時の商を  $q_2$  とすると  $(Y_1 - Y_2)n = (q_1 - q_2)m$  となる。 $n$  と  $m$  は互いに素であり、 $n \neq 0$  かつ  $m \neq 1$  であるので、 $Y_1 - Y_2$  は  $m$  の倍数でなければならない。しかし、 $Y_1 \neq Y_2$  であり、 $Y_i$  は  $0 \leq Y_i \leq m-1$  に限られるので、 $Y_1 - Y_2$  は  $m$  の倍数とはならず矛盾。したがって、背理法により、 $0 \leq Y_i \leq m-1$  の異なる任意の整数  $Y_1, Y_2$  ( $Y_1 \neq Y_2$ ) に対して、 $nY_1 \bmod m \neq nY_2 \bmod m$  が成り立つことが証明できる。

$0 \leq nY_i \bmod m \leq m-1$  であるので、以上より補題が成り立つことは明らか。

付録2 [ $\alpha\omega_0$  が無理数のとき、 $\mu(\gamma_0, \omega_0)$  が 0 に収束することの証明] 任意の無理数  $x_0$  は次の無限連分数によって表される [5]。

$$x_0 = [x_0] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{[x_2] + \dots + \frac{1}{[x_i] + \dots + \frac{1}{[x_i] + \dots}}}}$$

但し、 $x_i = [x_i] + 1/x_{i+1}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) であり、 $i = 1, 2, \dots$  で  $x_i > 1$  が成り立つ。

$x_0$  を  $x_k$  までの有限連分数で近似し、それを有理数  $n_k/m_k$  ( $m_k$  は正整数,  $n_k$  は整数,  $n_k/m_k$  は既約分数) で表すものとする。

$$x_0 \approx \frac{n_k}{m_k} = [x_0] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{[x_2] + \dots + \frac{1}{[x_k] + \dots}}}}$$

このとき

$$x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{m_k}$$

という関係が成り立つ。

一方、 $m_k$  は、

$$m_k = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ [x_1] & (k=1) \\ [x_k]m_{k-1} + m_{k-2} & (k=2, 3, \dots) \end{cases}$$

と表される [5]。  $i = 1, 2, \dots$  において、 $[x_i] \geq 1$  であるので

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{m_k} = \infty$$

となる。

以上より、無理数  $\alpha\omega_0$  が既約分数  $n_k/m_k$  で近似できる。付録1より、 $\alpha\omega_0$  が既約分数  $n/m$  で表される時、 $\mu(\gamma_0, \omega_0) = 1/m$  となるので、 $\alpha\omega_0$  が無理数の場合、アナログ直線の不確定区間幅は

$$\mu(\gamma_0, \omega_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{m_k} = 0$$

となる。