

粒子運動のセル構造オートマトンモデルとその応用

越中勝行 高井昌彰 佐藤義治

北海道大学工学部

コンピュータグラフィックスにおいて、煙、炎、雲のような境界の曖昧なオブジェクトやその自然な振る舞いを可視化するためのモデリングが必要とされている。近年、このような現象に対して particle system によるモデリング手法が提案されているが、粒子の複雑な振る舞いを表現するために各粒子間の相互作用を考慮すると膨大な計算量が必要となる。一方、セル構造オートマトンは形式的な並列計算モデルで、比較的単純な状態遷移規則によって複雑な挙動を表現できるという特徴がある。そこで、本論文では、Margolus 近傍形を用いたセル構造オートマトンに力学的量を付加した粒子運動モデルを提案し、そのグラフィックス応用の幾つかを基に本モデルの適用性を検討する。

Particle Motion Modeling by Cellular Automata and its Applications

Katsuyuki Ecchu, Yoshiaki Takai, and Yoshiharu Sato

Faculty of Engineering, Hokkaido University

Sapporo 060, JAPAN

This paper describes a model of particle motion based on cellular automata and its graphics applications. Recently, it increases the importance of the visualization of natural objects which have ambiguous boundaries and complex motions such as water flow, fire, smoke, etc. In conventional particle systems, however, to calculate interactions among a number of particles needs an extremely large amount of computation. On the other hand, cellular automata are massively parallel computation models which are able to simulate complex phenomena through simple calculations performed in parallel. In our modeling, particle motions are simulated by the cellular automata whose neighborhood system is Margolus neighborhood. We demonstrate some examples which shows the availability of our approach.

1 はじめに

近年、コンピュータグラフィックスにおいて、煙、炎、雲のような境界が曖昧で非常に複雑な振る舞いを有する現象のモデリングが注目されている [1][2]。

そのような現象に対して、particle system によるモデリング手法 [3] が提案されている。ここでは、各粒子が互いに影響を及ぼしあって起こっている複雑な振る舞いをリアルに表現するには、物理法則に基づく各粒子間の相互作用を考慮する必要があるため粒子数の2乗のオーダーの計算時間が必要となる。そのため、大量の粒子を用いた particle system では膨大な計算量を必要とする。したがって、計算量そのものの軽減、あるいはモデルに内在する並列性の観点から改良を加える必要がある。

一方、セル構造オートマトンは多数の有限オートマトンのある定められた近傍とトポロジーの下で規則的に連結した形式的な並列計算モデルで、自己増殖、パターン形成、並列アルゴリズムなどの観点から研究されてきた [4]。

セル構造オートマトンの特徴として、比較的単純な状態遷移の規則によって複雑な挙動を示すこと、および本質的に並列アルゴリズムであることが挙げられる。particle system のような個々の粒子に着目した粒子運動モデルにセル構造オートマトンを導入すれば、相互作用（ただし近傍に限る）に要する計算量は粒子数のオーダーで済む。また、セル構造オートマトンは並列計算モデルであるので、マルチプロセッサシステムとの親和性も高い。

そこで、我々は、セル構造オートマトンを先に述べたようなコンピュータグラフィックスにおける複雑なオブジェクトや自然現象のモデリングに適用することを検討してきた [5][6][7]。

本論文では物理法則に基づいた粒子運動を力学的量を考慮したセル構造オートマトンを用いてモデリングし、そのCG応用例の幾つかを示す。

2 セル構造オートマトン

d 次元無限格子からなる空間（セル空間）を考え、その格子点に同一の有限オートマトンを配置する。各有限オートマトンは、自分の近傍に位置するオートマトン（自分を含む）の現時点の状態を参照して、局所写像により次の時刻（ステップ）

の自身の状態を決定する。この状態遷移はセル空間全体にわたって同期して並列に行われる。ある時刻のセル空間全体の状態を様相（configuration）と呼び、現在の様相から次の様相を定める写像を並列写像という。

形式的にはセル構造オートマトンは4項組 (Z^d, Q, X, f) で定義される。 Z は整数の集合、 Z^d は d 次元のセル空間である。 Q は基本となる有限オートマトンの状態集合であり、 $X = \{z_1, z_2, \dots, z_n | z_i \in Z^d\}$ は近傍形、 $f: Q^n \rightarrow Q$ は局所写像である。ある時刻 t の様相 $c^{(t)}$ は Z^d から Q への写像であり、次の時刻の様相 $c^{(t+1)}$ は任意の $z \in Z^d$ に対して次式のように定まる。

$$c^{(t+1)}(z) = f(c^{(t)}(z+z_1), c^{(t)}(z+z_2), \dots, c^{(t)}(z+z_n)) \quad (1)$$

様相 c 全体の集合を C とすると、並列写像 $F: C \rightarrow C$ は近傍形 X と局所写像 f から一意に定められる。

3 粒子運動モデル

3.1 2次元モデル

3.1.1 セル状態

粒子が存在する空間をセルによって格子状に細分割し、セルに粒子が存在するか否かということによって粒子を表すことにする。粒子には質量と速度の属性を持たせる。また、セルによって粒子以外の障害物も表現する。以下に、セルの取り得る状態を示す。

- state: 粒子の占有状態を示す。state=1の場合、セルに粒子が存在し、0の場合存在しない。state=2の時セルは障害物を表す。特に、粒子が存在する場合、以下の属性が意味を持つ。

- mass: 粒子の質量
- velocity: 粒子の速度

また、セルが障害物で、その表面に位置する時、以下の属性が意味を持つ。

- e: 障害物と粒子間の反発係数
- normal: その面の鉛直方向を示す単位ベクトル

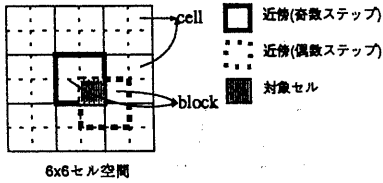


図 1: Margolus 近傍形

ただし、ここでいう速度は、一般で用いられる物理的な速度とは異なる。本モデルで用いる速度は、次のステップまでに速度の各成分方向に1セル分粒子が進む確率を表す。これは、セル構造オートマトンの性質上近傍の情報のみしか得られないことに起因している。つまり、局所的な状態遷移を行っているため、粒子は1ステップに最大でも1セル分しか移動できないのである。そこで、粒子に様々な速度を持たせるために、1ステップに粒子が動く確率を速度と考え、セル (i,j) に存在する粒子の速度を次のように定義する。

$$v_{(i,j)} = (v_x, v_y) \quad (|v_{(i,j)}| \leq 1) \quad (2)$$

ここで、 $-1 \leq v_x, v_y \leq 1$ はそれぞれ粒子が x 方向、 y 方向へ動く確率（負の場合は負の方向への確率）である。

また、粒子に質量を持たせ運動量を定義する。

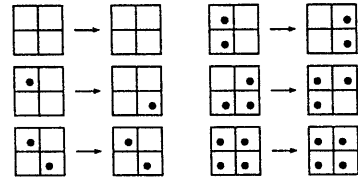
$$p_{(i,j)} = m_{(i,j)} v_{(i,j)} \quad (3)$$

ここで、 $p_{(i,j)}$ はセル (i,j) に存在する粒子の運動量で、 $m_{(i,j)}$ はセル (i,j) に存在する粒子の質量である。

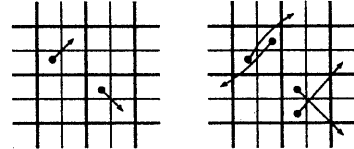
障害物は $state=2$ のセルが集団となって構成される。つまり、セルは障害物の1部分を表す。また、障害物の表面に位置するセルは、障害物と粒子との衝突のために反発係数と面の鉛直方向の単位ベクトルを属性として有する。また、障害物を表すセルの状態変化は起こらない。つまり、障害物には移動や変形は起きないものと仮定する。

3.1.2 近傍形

セル構造オートマトンには多数の近傍形があるが、よく用いられる5近傍や9近傍のような近傍



局所写像



粒子の動き

図 2: Margolus 近傍形における粒子の移動

形では粒子の数を保存することが困難である。その点を考慮して物理シミュレーションでよく用いられる近傍形である Margolus 近傍形を用いる。

図1のように2次元セル空間において隣接する4つのセルからなる「ブロック」を考え、各々のセルの近傍を同じブロックに所属する4つのセル（自分自身を含む）と定めるとき、これを Margolus 近傍形という [8]。

セル空間をブロックに分割する境界は奇数ステップ（実線）と偶数ステップ（破線）において異なる。これによって情報の伝搬（粒子の移動）が可能になる。

例えば、図2上で与えられるような局所写像の場合を考える。なお、ここで示した局所写像は回転したものを省略している。この局所写像では、粒子は自身の斜め向いへ移動する。ブロック分割は太線と細線の2種類の方法で交互に行われる。この結果、図2下のようにステップ毎に粒子はセル空間の対角方向へ進んで行く。

3.1.3 局所写像

局所写像によって各セルの次のステップにおける状態が決まる。本モデルの局所写像では、以下の4つの処理を順に行う。

- 外力処理
- 粒子間の相互作用処理

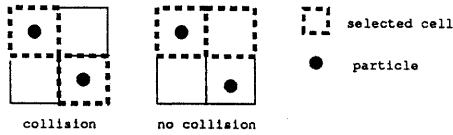


図 3: 衝突の起こし方

- 障害物との衝突処理
- セル状態の更新

外力は各セルに対し定義され、その外力によって粒子の速度を変化させることができる。

まず、運動方程式よりセル (i,j) 上の粒子の加速度 $a_{(i,j)}$ を求める。 $F_{(i,j)}$ をセル (i,j) に作用する外力とする。

$$a_{(i,j)} = \frac{F_{(i,j)}}{m_{(i,j)}} \quad (4)$$

これより、粒子の速度を次のように変化させる。ここで、 Δt は定数である。

$$v'_{(i,j)} = v_{(i,j)} + \Delta t a_{(i,j)} \quad (5)$$

また、外力としては次式で示される保存力場における保存力を含めることも可能である。

$$F_{(i,j)} = -\text{grad} U_{(i,j)} \quad (6)$$

$$\text{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

ここで $U_{(i,j)}$ はセル (i,j) でのポテンシャルである。

粒子間の衝突という現象がどのようにして起こるかは本質的な問題であるが、我々は、次のように、衝突が起こる場所（2つのセル）を選択するという方法を採用した（図3）。

- ブロック内でランダムに2つのセルを選択する。
- その両方のセルに粒子が存在する場合、その2つの粒子間で衝突を起こす。

したがって、ブロック内に粒子が2個以上存在する時に衝突が起こる可能性がある。ブロック内に粒子が2個の時 $1/6$ 、3個の時 $1/2$ 、4個の時 1 の確率で衝突が起こることになる。また、粒子密

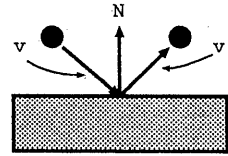


図 4: 障害物との衝突

度 ρ でセル空間に一様に粒子が分布している場合、各ブロックでは ρ^2 の確率で粒子間の衝突が起こることになる。

衝突する2粒子間の速度は以下の式にしたがって変換される。

$$v'_a = V_0 + e \frac{m_b}{m_a + m_b} |v_a - v_b| R \quad (7)$$

$$v'_b = V_0 - e \frac{m_a}{m_a + m_b} |v_a - v_b| R \quad (8)$$

$$V_0 = \frac{m_a v_a + m_b v_b}{m_a + m_b}$$

$$R = (\cos \theta, \sin \theta)$$

ここで、 v_a, v_b は粒子 a, b の衝突前の速度、 v'_a, v'_b は粒子 a, b の衝突後の速度、 m_a, m_b は粒子 a, b の質量、 e は反発係数、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ は衝突後の方向を定めるものである。 $e=1$ の場合、完全弾性衝突となり、 $e < 1$ の時、非弾性衝突となる。また、衝突後の粒子の方向はランダムに定めている。

粒子の移動先に障害物が存在する場合、障害物との衝突が起こる（図4）。粒子はセルによって表される障害物と衝突し、その表面の鉛直ベクトルと自身の速度によって、次のように速度の更新を行なう。

$$v' = v - (1+e)(N \cdot v)N \quad (9)$$

ここで、 v', v はそれぞれ衝突後、衝突前の粒子の速度である。また、 N は障害物の表面の鉛直方向の単位ベクトルで、 e は障害物との反発係数である。

以上、3つの処理からなる粒子の速度変換を行った後、粒子をその速度にしたがって移動させる。ただし、ここで以下の制約が存在する。

- Margolus 近傍形を用いているため、粒子はそのステップの状態遷移で属しているブロックの外へは移動できない。

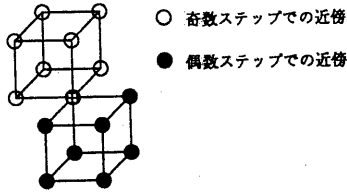


図 5: 3次元での Margolus 近傍形

- セルが持つ状態の定義から、2つ以上の粒子は同一セルに存在することができない。
- 障害物を表しているセルの状態は変化しないため、粒子はそのセルへ移動できない。

モデルの定義から、これら3つの制約はモデル上必ず守られることになる。したがって、粒子はこの3つの制約を守った上で、可能な限り速度にしたがった移動を行う必要がある。具体的には、以下のような手順で各ブロック毎に、そのブロックに属する粒子の移動先を決定する。

- 速度は1セル移動する確率であるので、その確率にしたがって、粒子がブロック内の上下左右いずれかの方向に1セル分進むか否かを決める。
- 粒子がブロック内で移動可能な組み合わせのなかで最もよく条件を満足する粒子の移動を行う。

3.2 3次元モデル

以上、述べてきた2次元モデルを3次元に拡張することが可能である。これによって、3次元の障害物との相互作用などが実現できるので、ビルの谷間で揺らめく煙や急峻な地形を流れ下る水などのような現象を、よりリアルに再現することが可能となる。

Margolus 近傍形の3次元化は容易である。図5では、あるセルのそれぞれのステップにおけるブロック分割による近傍を示している。図のように8つのセルからなるブロックにセル空間を分割する。ブロックに分割する方法には2次元モデルと

同様、奇数ステップと偶数ステップの2種類が存在する。

3次元化で問題となるのは計算量である。例えば、 $S \times S$ の2次元セル空間と $S \times S \times S$ の3次元セル空間の計算量の比較を行なうと、単純に S 倍になるわけではない。というのも、次ステップにおける各セルの状態を決定するために、ブロック内ですべての粒子移動のパターンを調べているため、2次元では4!回のループを要したが、3次元では8!回のループを要することになるためである。その結果、全体として2次元に比較して $1680 \times S$ 倍の計算量を必要とする。

そこで、近似的な方法として、すべての移動可能性を調べあげるのではなく、ブロック内のセルに、速度による順位をつけて、その順番にセル状態の移動先を決定する方法が考えられる。この方法だと、幾分、速度に対し厳密さが損なわれるが、計算量において2次元の時と比べて約 $2.7 \times S$ 倍、すなわち、先に述べた方法の $1/630$ の計算量で済むことになる。

4 応用例

以下に本粒子運動モデルを用いたCGシミュレーションの応用例を示す。本モデルを逐次型計算機にインプリメントするにあたり、計算量の軽減のために粒子の存在しないブロックは計算を行っていない。また、1セルに対しメモリー量を2次元の場合25bytes、3次元の場合は33bytes割り当てた。

4.1 粒子の凝集

2次元の空間において、粒子が衝突を繰り返すにしたがって、徐々に凝集する様子をシミュレートした(図6、白い点が粒子を示す)。セル空間は 128×128 である。初期速度をランダムに定めた一定量の粒子を外力のないセル空間にランダムに配置した。粒子密度は0.3であり、粒子数は約5000個である。また、粒子間の反発係数は0.5に定めた。計算にはSun SPARCstation 2GSで800ステップまでに約800秒を要した。

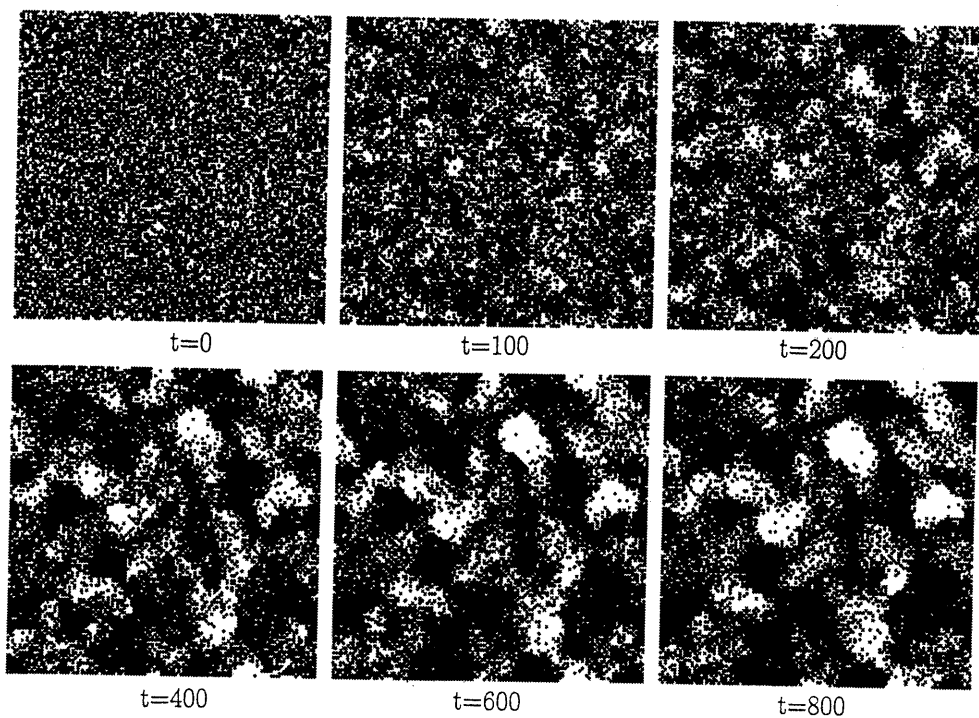


図 6: 粒子集団の凝集過程 (粒子数約 5000)

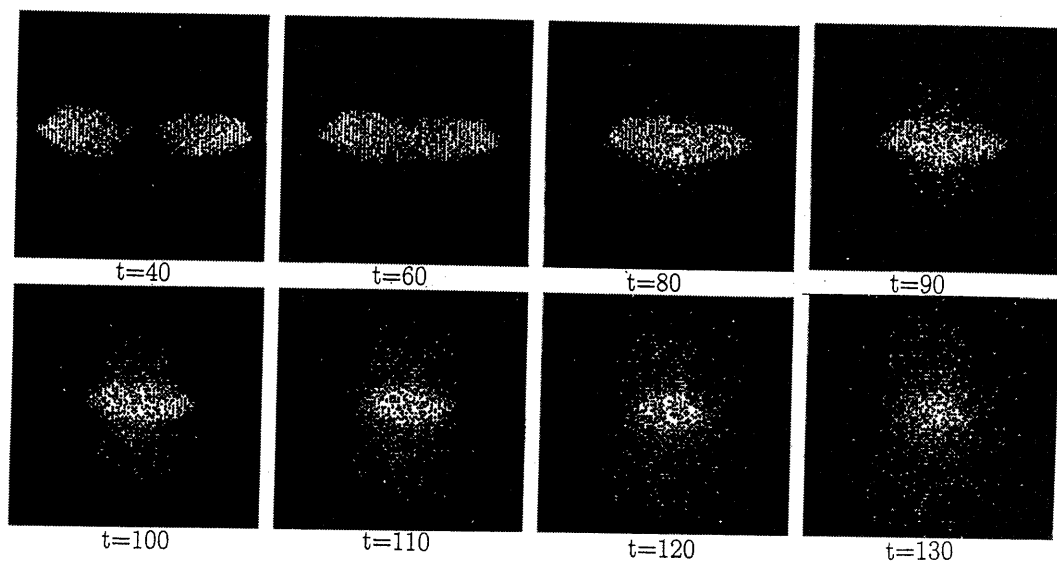


図 7: 粒子集団の衝突 (粒子数約 300x2)

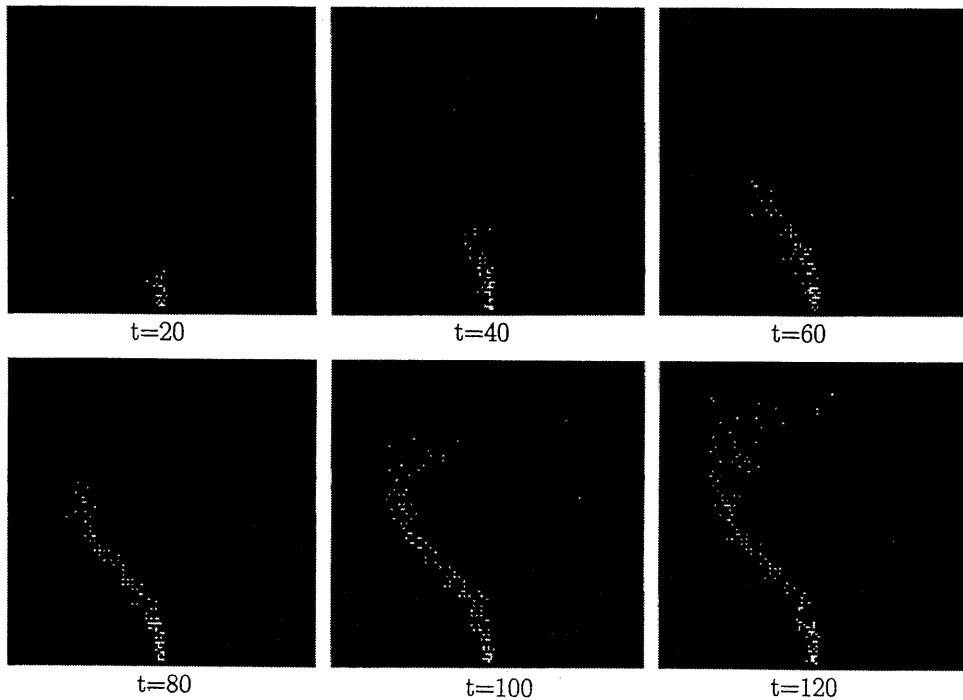


図 8: 立ち登る煙

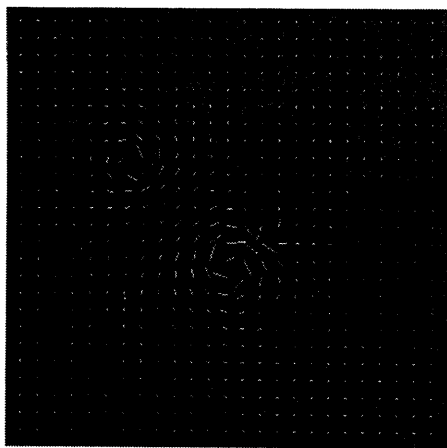


図 9: ランキン渦の外力場

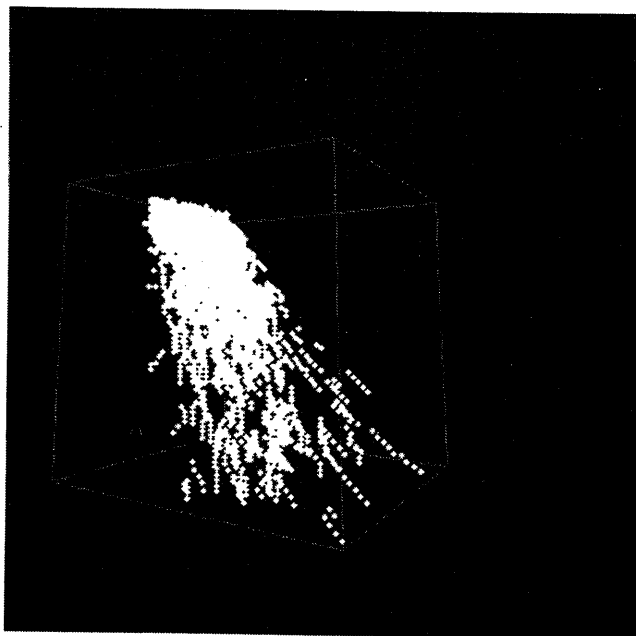


図 10: 水流

4.2 粒子集団の衝突

2つの粒子集団が外力のない空間で衝突し散乱する様子をシミュレートした(図7)。セル空間は 128×128 である。各粒子集団は、はじめに半径10セルで粒子数約300個からなる円形の塊として与える。各粒子集団の粒子にはそれぞれ同一の速度(0.8, 0)、(-0.8, 0)を持たせた。また、粒子間の反発係数は1.0に定め、粒子の質量はすべて1.0とした。計算にはSun SPARCstation 2GSで130ステップまでに約70秒を要した。

4.3 煙

外力を用いて立ちのぼる煙の振舞いをシミュレートした(図8)。ここでは、2次元のセル空間の下の部分から上昇速度を持たせた粒子を1ステップ当たり平均1個発生させている。粒子の質量は一定で、反発係数は1.0とした。

また、外力として、渦巻状の外力を与えている(図9)。この外力は静的なもので、文献[1]で用いられているランキン渦で時間によって変化しないものを用いた。計算にはSun SPARCstation 2GSで120ステップまでに約8秒を要した。

4.4 水流

3次元のセル空間上部より粒子を発生させることによって水流をシミュレートした(図10、ただし、粒子の分布状態のみでレンダリングを行っていない)。外力として重力を与えるとともに、流れ落ちる中間部分に障害物を設定することで、弾け飛ぶ水流の様子を表現することができる。セル空間は $64 \times 64 \times 64$ である。障害物は球形で、反発係数は1.0とした。計算にはSun SPARCstation 2GSで130ステップまでに約270秒を要した。

5 むすび

Margolus近傍形を有するセル構造オートマトンに力学的量を付加することで粒子運動のモデリングを行った。セルで表される粒子に質量および確率的な速度を持たせ、粒子間の局所的相互作用を考慮に入れることにより物理法則に従った動きを実現した。また、セル空間内に存在する障害物と

粒子間の相互作用も考慮した。これによって、粒子運動モデルの利用範囲が広がると考えている。

今後は3次元モデルにおいて、より大きなセル空間での粒子運動モデリングを行いたいと考えている。そのためには、計算量や得られるデータ量の問題を解決する必要がある。また、本モデルの特徴をふまえた粒子集団のレンダリング技法の研究も合わせて行う予定である。

参考文献

- [1] 村岡, 千葉他: “渦場と粒子による煙や炎の2次元CGシミュレーション”, 電子情報通信学会論文誌, **J76-D-II**, 8, pp. 1735-1745 (1993).
- [2] 安居院, 河野, 中嶋: “コンピュータグラフィクスにおける火炎の2次元画像の生成”, 電子情報通信学会論文誌, **J74-D-II**, 2, pp. 184-189 (1991).
- [3] K. Sims: “Particle animation and rendering using data parallel computation”, *Computer Graphics*, **24**, 4, pp. 405-413 (1990).
- [4] T. Toffoli and N. Margolus, *Cellular Automata Machines*, MIT Press (1987).
- [5] 越中, 高井: “3次元セル構造オートマトンの可視化”, 第6回札幌国際コンピュータグラフィクスシンポジウム論文集, pp. 37-40 (1992).
- [6] 越中, 高井, 佐藤: “形状モデリングにおけるセル構造オートマトンの応用”, 情報処理学会第46回全国大会講演論文集, **2**, pp. 481-482 (1993).
- [7] 越中, 高井, 佐藤: “力学的量を付加したセル構造オートマトンによる粒子運動モデル”, 電子情報通信学会秋季大会講演論文集, **6**, p. 349 (1993).
- [8] N. Margolus: “Physics-like models of computation”, *Physica*, **10D**, pp. 81-95 (1984).