

## 4次元折り紙とそのCG表現

海野啓明 矢島邦昭 佐藤大輔  
仙台電波高専 電子制御工学科  
Email: kaino@cc.sendai-ct.ac.jp

普通の折り紙を3次元折り紙とすると、4次元折り紙は立体を4次元空間で折ることになる。4次元空間における物体のイメージを得るには、4次元折り紙を折り、その過程を表現することが良い。既に折られたものとして4次元熨斗や4次元鶴の基本形がある。本論では、4次元折り紙の幾何学の基本の「4面体の内心の定理」を4面体の折りたたみにより動画で説明する。4次元折り鶴は正8面体から、3次元折り鶴と同様の過程を経て折る。まず、正8面体から4次元鶴の基本形を折り、次に基本形から4次元折り鶴を折る。これらの過程を動画で表現することで4次元空間についてある程度のイメージを得ることができる。

## Four-Dimensional Origami and Animation of Folding Procedures

Keimei KAINO Kuniaki YAJIMA Daisuke SATO  
Sendai National College of Technology

By pure analogy of a usual three-dimensional Origami, we can fold a solid material along flat surfaces in the four-dimensional space. We will show a procedure to fold a tetrahedron along bisectors of the dihedral angles and its animation which demonstrates that the point of intersection of those bisectors is the center of the circle. Consistently joining such folded tetrahedra which construct the regular octahedron, we will obtain a four-dimensional bird base. Animation of the procedure of folding the four-dimensional crane from the regular octahedron will give us a good understanding of the four-dimensional space.

## 1. はじめに

折り紙は平面の紙を3次元空間で折るので、これを3次元折り紙と呼ぶならば、「4次元折り紙」とは立体の紙を4次元空間で折るものといえる。高次元折り紙の幾何学を数学的に調べる場合は、紙の表裏や山谷折りを無視したほうが簡単でよい。川崎はこの立場から多くの研究成果を発表している[1]。しかし実際には、3次元折り紙の作品を折る過程で、折り紙の表裏や山折り線と谷折り線を明示する折り図が必要である。4次元折り紙の場合でも同様である。折り紙の幾何学は伏見夫妻[2]やJ. Justine[3]により「折り鶴」とその変形に関して研究され、川崎[4]により「折り鶴変形理論」として完成された。4次元折り鶴変形理論の研究も始められている[5]。

4次元折り紙をこの世界で折ることができないが、折る過程をCGで表現することは可能である。4次元折り紙の作品の存在は、そのデータ構造が2分木リストで表現できることが言えればよい[6]。4次元折り紙で折る対象は色々ある。例えば正多面体の4次元版としての正多胞体や、3次元折り紙の4次元版などが考えられる。実際にはAbbott [7]が"FLATLAND"に書いたように1次元高い世界のことを想像することは簡単ではない。その意味で4次元折り紙は4次元空間を想像するための便利な手段となる。

4次元折り紙の作品としては、正8面体から折られた「4次元のし」がある[8]。4次元折り紙の基本定理は「4面体の内心の定理」であり、これは「4面体」を折りたたむことで実演される。4面体のおりたたみは4次元折り紙を理解するよいモデルである[9]。これを基本にして正8面体から「4次元鶴の基本形」折り、さらに「4次元折り鶴」を折ってみる[10]。本論ではこれらのことを解説し、折り方の過程をよく理解するために動画を作成したので報告する。

## 2. 4次元折り紙の折り方

3次元折り紙では紙を平面に置き、折り線で折る。このとき紙の半分は曲げて平面に垂直に起こしてから折り重ねる(図1)。4次元折り紙では、4次元空間  $O\text{-}xyzu$  を考え、立体を  $u = 0$  の3次元  $xyz$  空間に置き、折り面で立体の半分を4次元方向に曲げて起こしてから折り重ねる。簡単にいえば折る操作は折り面  $f$  と垂直方向および  $u$  軸で張られた平面内の回転となり、 $180^\circ$  回転すれば折り面  $f$  に対する鏡面对称となる[1]。実際には折り面  $f$  で分割された部分が互いに透過しないので  $u$  軸上で重なり順序が生じる。なお、 $u$  軸方向の上下は超上、超下と呼ばれる[11]。

4次元折り紙の最も簡単な例として「4次元のし」を折る過程を図2に示す[8]。これは「のし」の4次元版で、折り方はジグザグに  $u$  軸上に折り重ね、最後にのし鮑を中に入れる。折り方の流儀は色々ある[12]。ここでは最も単純な折り方にした。CGで表現するには、まず4次元折り紙を  $u = 0$  超平面 ( $xyz$  空間) に投影し、折り重なる物体を透明にして全部が見えるようにする。図2のようにサーフェスモデルを用いると折り面が目立たないので、ソリッドモデルによる表現がよい。4次元の観察者が見ると、4次元折り紙には裏表があり、折り重ねられて見えない部分がある。これをCGで表現するためには立体的な表現を利用するのが良いだろう。

## 3. 4次元折り紙の基本定理と4面体の折りたたみ

4次元折り紙の基本定理を見る前に、3次元折り紙の幾何学を簡単に述べる。伏見夫妻[2]は折り鶴の羽ばたく機構を考察し、折り紙の基本定理が「3角形の内心の定理」であることを見つけた。折り鶴は日本の折り紙の典型的な作品である。折り紙には幾つかの基本形があり、折り鶴は「鶴の基本形」(Bird Base) から折られる(正方形の2つ角が翼、他の2つが首尾となる)。その折り図には、図3に示されるように、正方形が4つの直角

2等辺3角形に分けられ、各々が角の2等分線を折り線として折りたたまれる。この折り線の交点が内心であり、隣合う内心を結ぶ線分が翼が180°開閉する軸となる(この軸は3角形の内心から底辺に下ろした垂線)。

これから類推すれば、4次元折り紙の基本定理は「4面体の内心の定理」と言える。この定理は「4面体の6つの稜角の2等分面は1点Iに会する;点Iは内心と呼ばれ、内接球の中心である」と述べられる[13]。3角形の場合と同様に、この定理により4面体を折りたたむことができる。

図4のように4面体ABCDを置き、内心Iから4つの面に下ろした垂線の足をQ, R, S, Tとする。折りたたみの手順は次のようになる。

(1) 4面体ABCDを内心Iを頂点とする4つの小4面体IABC, IABD, IBCD, ICDAに分割する。

(2) 4面体IABCを折り面IAB(ABの稜角の2等分面)で折るとSはQに、DはD<sub>1</sub>(xy平面上)に移る。同様にして、4面体IBCD(ICDA)を折るとT(R)はQに移り、DはD<sub>2</sub>(D<sub>3</sub>)に移る。

(3) 4面体IABC, IBCD, ICDAを別々に折ったために離れた面同士: IAD<sub>1</sub>とIAD<sub>3</sub>, IBD<sub>1</sub>とIBD<sub>2</sub>, ICD<sub>2</sub>とICD<sub>3</sub>を元のように接続する。

これで、4面体を3つの稜角の2等分面で折るとそれらは1点Iで交わり、4面体の表面はxy平面上で重なることがわかるなど、4次元折り紙の基本定理について直感的に理解できる。しかし、この折りたたみは謂わば紙の表裏を区別していない。紙の表裏や互いに透過しないことを考慮するには、折り紙が2分木リストで表される必要がある[6]。これを簡単に見るモデルがある[9]。4面体の4つの表面に上述した(1)の小4面体を対応させて、4面体を底面に押し潰すと、折られた面は互いに1点で固定される。図5のように、潰した4面体をを上から見たものは、 $u=0$ 超平面に置かれた4面体をその底面に射影したものにほかな

らない(面の重なりは2分木リストになる)また、底面に垂直な方向はu軸方向とみなせる。図5より、4面体の折り方には2通りあり、1方は羽が回転する自由度を持つが、他方はないことがわかる。以上の考察から、4面体を折りたたみ、羽が回転する様子を見る動画を作成した(図7)。

#### 4. 4次元折り鶴の基本形の折り方

4次元鶴の基本形を考える前に、普通の鶴の基本形を見てみる。まず、普通の折り紙は正方形を用いて、始めに対角線折りかブック折りでピッタリ折り重ねることが多い。鶴の基本形の折り図(図3)では、2本の対角線により正方形が4つの直角3角形に分割され、それぞれが内心の定理により折りたたまれることが特徴である。正方形の中心(対角線の交点)は鶴の中心と呼ばれる。4つの角の1対は翼でもう1対は首尾となる。これらは互いに交換できるので(首翼互換性)、鶴の中心から4つの角を結ぶ線分を一致させられる(図3)。

4次元折り紙では正8面体を用いる。これはブック折りと対角面折り(向い合う2頂点を重ねる折り方)ができるが、これと双対の立方体ではブック折りしかないからである。

鶴の基本形の4次元版は、図6のように置かれた正8面体をx, y, z平面で8つの合同な小4面体に分割し、各々の小4面体を「4面体の内心の定理」により折りたたんだものになる[10]。正8面体の中心は鶴の中心である。この基本形が首翼互換性を持つことを見るためには、図6のように角が正3角形になるように広げ、鶴の中心と角を結ぶ線分を一致させるように折りたためばよい。正8面体の角の1対は首尾で他の2対が翼になるが、これらは互いに換えられる。

4次元鶴の基本形を折る手順は次のようになる。

(1) 正8面体をxz平面とyz平面で対角面折りする。

(2) xy平面の上半分と下半分の4面体を「内心の定理」により折りたたむ。

この折る過程を動画に作成した。

## 5. 4次元折り鶴とその変形

まず、普通の折り鶴の折り方の手順を示す。

- (1) 鶴の基本形で、4つの角を一致させ、1対を180°折り上げる。
- (2) 首と尾について、角の2等分折りした後、中割り折りする（首尾が翼より細くなる）。
- (3) 首の部分を中割り折りして折る。

以下では簡単な為、手順(2)における中割り折りを省略する（胴を膨らませ難くなる）。

4次元鶴の基本形から手順(1)により6つの角を一致させると図6のようになる。ここで角と対の頂点Pは鶴の中心ではないが、角とこの頂点Pと鶴の中心とは同一直線上にあるが、鶴の中心は折りたたまれて見えない。この頂点Pは腹とみなすことにする。首と尾は鶴の中心を挟んで重なっている。内側の部分を中割り折りして首を作る。最後に、翼を90°折り上げる。これらの過程のセル画を約160枚作り、動画を作成した(図8)。

翼を開くまでは  $u = 0$  超平面 (xyz 空間) で折り、最後に翼を  $u$  軸方向に開くところが同じスクリーンで表現したため印象がやや薄い。 $u$  軸頂上に光源を設けて陰影付けすると効果が出るであろう。

## 6. さいごに

4次元折り紙について概説し、CGによる表現を考察した。以下のようにまとめられる。

- (1) 「4次元のし」と4面体の折りたたみの過程を動画にした。折り紙物体を透明にし、折り重ねられたもの濃く表現した。物体の表裏や、超上超下方向の重なり表現は、超上方向からの陰影付けで表現できる。
- (2) 4次元鶴の基本形を折り、これから4次元折り鶴を折る過程を示した。普通の折り鶴と4次元版との違いがあるが、ほぼ同じ形になる。翼を  $u$  軸方向に開く過程を印象付けるためには、超上方向からの陰影付けが必要である。

(3) 4次元折り紙を折る過程をCGで表現すれば、4次元空間の理解に役立つ。4次元空間のCG表現の幅が広げられる。

(4) 折り鶴の他にも伝承折り紙は多い。また折り鶴変化の色々ある。江戸時代には一枚の紙から何羽も繋がった鶴を折ることが流行した[14]。伏見[2]の創作に始まる一連の変形折り鶴や飛ぶ折り鶴がある[4]。今後はこのような作品を折る過程を動画にしたい。また TVML などを利用して4次元幾何の教育番組制作にもとりくみたい。

## 参考文献

- [1] 川崎：季刊をる，No.8, 双樹舎, 1995
- [2] 伏見，伏見：折り紙の幾何学,日本評論社,1979
- [3] J.Justine: Symmetry: Culture and Science, Vol.5, p.153, 1994
- [4] 川崎:佐世保高専研究紀要,No.32, p.29, 1995 ;バラと折り紙と数学と, 森北出版, 1998
- [5] 海野:仙台電波高専研究紀要,No.30, p.39, 2000
- [6] 宮崎他:情処論,Vol.34, p.1994, 1993; 内田, 伊藤:情処論, Vo.32, p.1566, 1991
- [7] E.A.Abbott:FLATLAND:A Romance of Many Dimensions, Seeley&Co. 1884, Dover 1992;
- [8] K. Miyazaki: Proceedings for the Second International Meeting of Origami Science and Scientific Origami (ed.K.Miura et al.), Seian University of Art and Design, p.51, 1997
- [9] K.Kaino: Forma, Vol.15, p.49, 2000
- [10] 海野:形の科学会誌, 第15巻, p.206, 2001
- [11] 宮崎, 小高:図形科学, 朝倉書店, 2000
- [12] 小笠原:季刊をる,No.3, p.8, 双樹舎, 1993
- [13] 岩田編:幾何学大辞典2, 槇書店, 1974
- [14] 笠原:最新折り紙のすべて,日本文芸社,1998

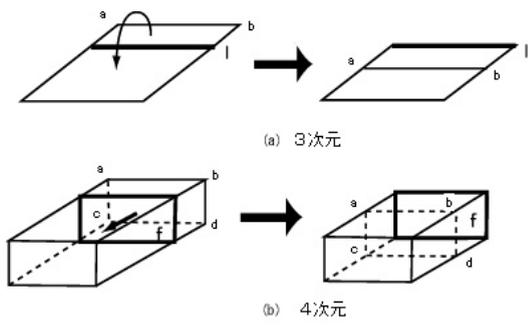


図1. 折り紙の折り方

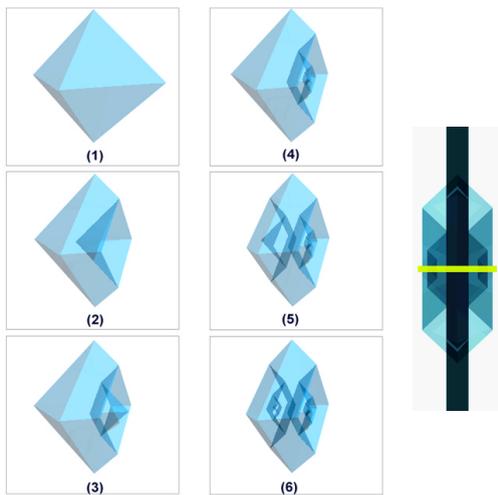


図2. 4次元のし

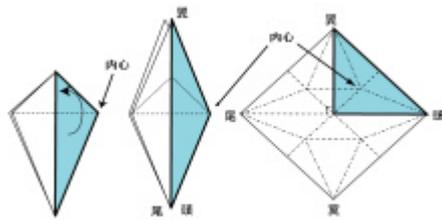


図3. 鶴の基本形

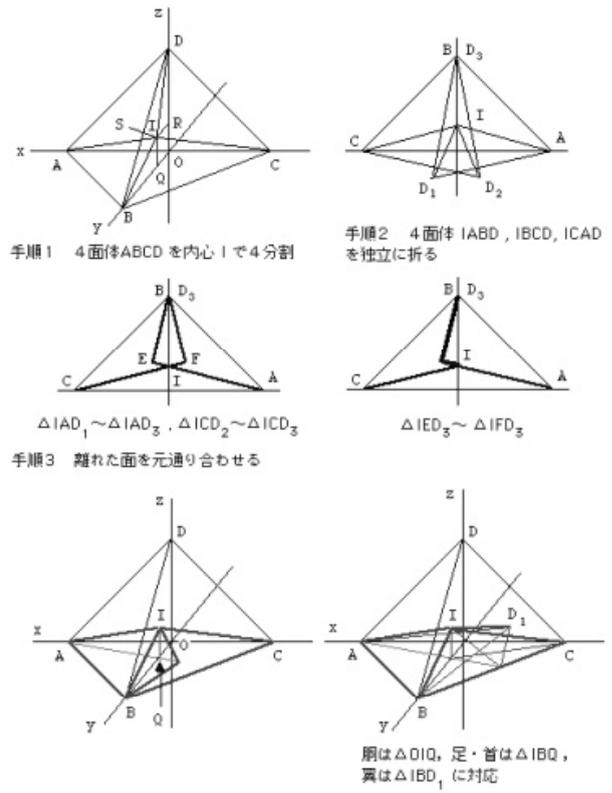


図4. 4面体の折りたたみ

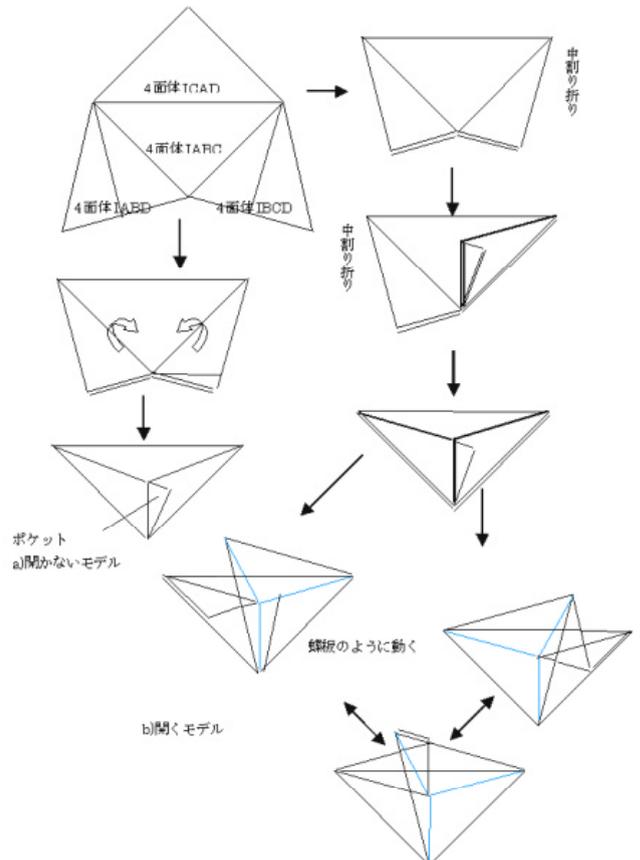


図5. 4角体の折りたたみモデル

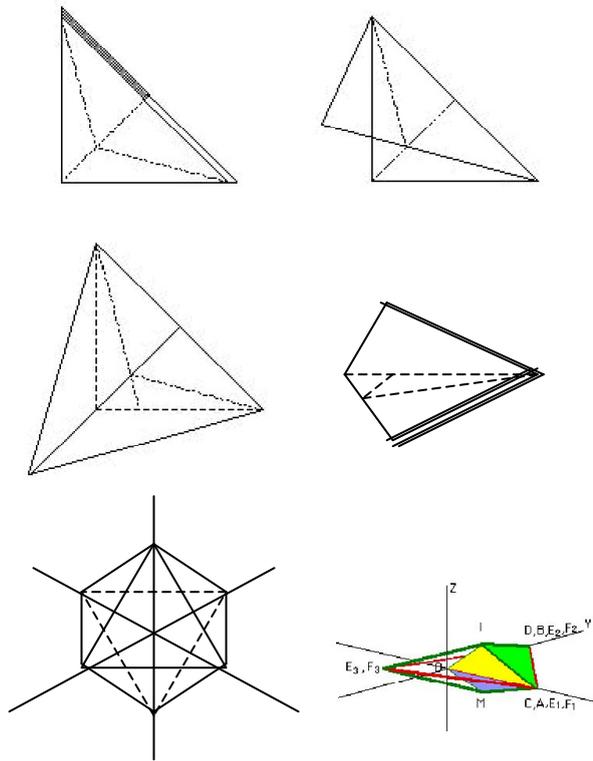


図6 . 4次元鶴の基本形の翼の開閉

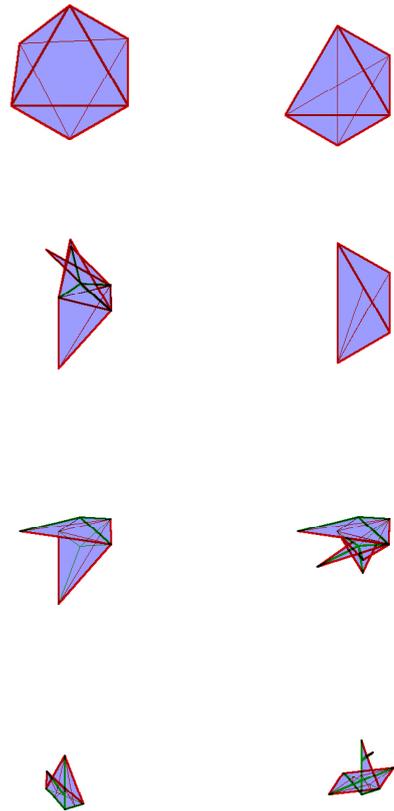


図8 . 4次元折り鶴のアニメーション

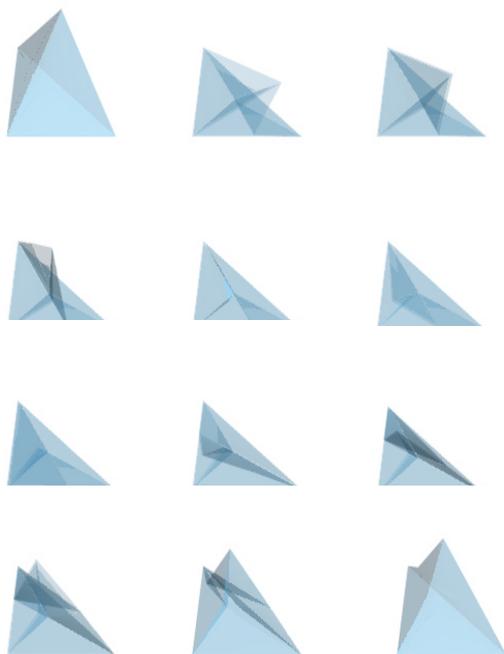


図7 . 4面体のアニメーション