情報処理学会研究報告
IPSJ SIG Technical Report
Vol.2022-GI-47 No.14
2022/3/18

将棋における状態空間数の上下界

都 勇志[1,a)]　木谷 裕紀[2,b)]　小野 廣隆[1,c)]

概要：ゲームの難易比較や AI ベンチマークの妥当性評価などのため，二人零和有限確定完全情報ゲームの「複雑さ」の計量が様々な形で研究されている．代表的な「複雑さ」の尺度の一つが状態空間数であり，これは初期局面から到達可能な局面数として定義されている．本研究では将棋の状態空間数の見積もりを行う．禁則ルールの多さなどから将棋の厳密な状態空間数を測ることは容易ではないが，2008 年の篠田の研究により 4.65×10^{62} と 9.14×10^{69} の間の値を取ることがわかっている．本研究では将棋の状態空間数のより正確な評価を行い，2.45×10^{64} と 6.78×10^{69} の間の値を取ることを示す．上界値の評価については持ち駒が少ないほど局面のパターンが増えることに注目した計量方法を提案する．下界については，篠田により提案された駒配置のテンプレートを改良し，これに基づく解析を行う．また将棋から派生したゲームである 5 五将棋についても状態空間数が 13 桁から 20 桁の間であることを示す．

Upper and lower bounds on the state-space complexity of Shogi

Yuji Miyako[1,a)]　Hironori Kiya[2,b)]　Hirotaka Ono[1,c)]

1. はじめに

1.1 背景

将棋は日本で古来より広く親しまれているゲームであり，二人零和有限確定完全情報ゲームに分類される．二人零和有限確定完全情報ゲームとはプレイヤの数が 2 人，片方のプレイヤの利得がもう片方のプレイヤの損失となり，有限手数で終了し，偶然の要素が入り込まない，すべての情報が 2 人のプレイヤに公開されているゲームを指し，将棋以外にもチェス，囲碁や本研究でも扱う 5 五将棋などがこれにあたる．将棋，チェス，囲碁はいずれも世界各国で遊ばれる他，それらのゲームをプレイする AI の開発を始めとした多種多様の研究が行われている．

二人零和有限確定完全情報の研究における重要な研究テーマの一つが「囲碁と将棋はどちらが難しいか」に代表される，ルールの異なる二人零和有限確定完全情報ゲームの難易に関するものである．そのような際，ゲーム同士の複雑さを定量的に測った上での比較がしばしば行われるが，その「複雑さ」をどのような形で定義するかには様々な考え方がある. その中でも特に多く研究されているゲームの複雑さ基準はゲーム木のサイズ [11]，あるいは状態空間数（state-space complexity）[2], [4], [7] などである．ここでゲーム木のサイズの定義は，ゲーム木を局面を節点，ルールに違反しない手を枝とした木とした上で，ゲームの勝敗か引き分けが決まった局面を表す葉の数をサイズとする [11]．一方，状態空間数とは初期局面から到達可能な局面の総数のことを指す．これらの指標を通すことにより，相異なるゲーム同士の複雑さの比較が可能となる．

将棋に対してもこれらの指標を見積もる研究，あるいは上下界を与える研究がなされている．例えばゲーム木のサイズについては，将棋の一局の平均手数 115 手と各局面での可能な指し手の数の約 80 通りに注目し， 約 80^{115} 個程度という言及 [10] がある他，状態空間数は 2008 年に篠田によって 4.65×10^{62}〜9.14×10^{69} であることが示されている [9].

本研究ではこのうち状態空間数に注目し，より細微な解析を行い，本将棋およびその派生ゲームである 5 五将棋の局面数の上下界を示す．結果として本将棋の上下界が

1 名古屋大学大学院情報学研究科
2 九州大学大学院経済学研究院
a) miyako.yuji@i.mbox.nagoya-u.ac.jp
b) h-kiya@econ.kyushu-u.ac.jp
c) ono@nagoya-u.jp

2.45×10^{64} 以上，6.78×10^{69} 以下であること，5 五将棋の上下界が $4.59 \times 10^{12} < L' < 1.95 \times 10^{19}$ であることを示す．

1.2 関連研究

本節では状態空間数に関する関連研究を紹介する．状態空間数は，取り扱うゲームの状態空間数がある程度小さければ，初期局面から到達可能な局面全てを数えるプログラムによって求められる．例えば，どうぶつ将棋という 3×4 盤面の将棋から派生したゲームはその状態空間数が計算されており，その状態空間数は約 2.46×10^{8} であることが知られている [12]．しかし状態空間数が大きいゲームになるにつれて，同様のアプローチは困難となってくる．これに対し，将棋系統のゲームにおいては起こりうる駒の配置の全列挙により計算を行う手法が行われており，例えば中国将棋，朝鮮将棋は Park が厳密な状態空間数を導出している [4]．またその状態空間数は中国将棋は約 7.58×10^{39}，朝鮮将棋が，約 2.34×10^{44} であることが知られている．Park はこれらの厳密な状態空間数を得ることができる理由について，将棋やチェスのように成り (プロモーション) のルールがないためと分析している．

チェスにおける状態空間数としては，Shannon の見積もり [5] に始まり，Chinchalkar により 1.78×10^{46} の上界が示されている [1]．チェスに関してはプロモーションを含めない場合の研究も進んでおり，上界として 4×10^{37} が与えられている [2]．駒の配置を考慮して上界を得る研究だけでなく，Tromp はランダムに生成された 10000 の局面の合法性を確認し，チェスのルール違反の無い局面数を 95% の信頼度で $4.48 \pm 0.37 \times 10^{44}$ と推定している [6]．

また，チェスや中国将棋を始めとして，多くの場合状態空間数よりもゲーム木の葉の数の方が大きいことが分かっている [3]．

2. 先行研究における上下界解析

将棋における状態空間数 L は実現可能，つまり，将棋のルール上，初期局面から合法手のみで到達可能な盤面 (以下では実現可能局面と呼ぶ) のうち，駒配置，持ち駒，手番のいずれかが異なる局面を別の局面として数え上げたものである [9]．このうち，合法手とは以下の禁則事項を含まない手である．

1 同じ段に「歩」駒が二枚以上現れる (二歩).
2 手番終了時に自玉 (手番を終えたプレイヤの王将または玉将) に王手がかかっている (王手放置あるいは王手無視).
3 どちらかのプレイヤが二手連続で着手する (二手指).
4 行き所のない自軍駒を生み出す着手を行う．

将棋における禁則事項としてこれ以外に同一局面に複数回達したときに関するルールである「連続王手における千日手」と呼ばれる禁則事項があるが，状態空間数を数えるうえではこの禁則事項は考慮にいれなくてよいことに注意する．

この定義の下で，篠田は状態空間数にあたる実現可能局面数 L を上からと下からそれぞれ評価している．以下ではその方針の概要について説明する．

2.1 上界の計算

篠田は双方の玉は隣接しない (禁則事項 2 または 3 より)，二歩がない (禁則事項 1 より)，行き所のない歩がない (禁則事項 4 より) という三つの条件を満たす駒配置，持ち駒，手番のいずれかが異なる局面を双方の玉の位置による場合分けによって計算を行った．その局面数は 1.0813×10^{70} である．さらに篠田はこれらの局面のうち，直前の手番において王手無視を行っている局面の一部を除いた値に関してさらに計算を行っている．具体的には非手番プレイヤの王将の正面 1 マスから王手がかかっている局面をすべて除いている．それらにより状態空間数は 9.14×10^{69} 以下であることが導かれる．

2.2 下界の計算

下界は，具体的に到達可能な局面の条件とその手順を示し条件を満たす局面数を数えることにより導出している．

h	h	h	h	h	h	h	A	玉
h							と	B
h						k		h
h					k			h
h				k				h
h			k					h
h		k						h
D	と							h
玉	C	h	h	h	h	h	h	h

図 1 出典 篠田 2008[9], p.118

図 1 は参考文献 [9], p.118 で示されている配置で先手は 1 一に玉将，2 二に「と金」がおいてあり，後手玉は 9 九に玉将，8 八に「と金」が置いてある．残りの駒は以上の 4 マスと ABCD 以外の 73 マスのいずれかまたは駒台に置かれるが．盤面の h のマスには飛車や竜，k のマスには角行や馬は配置しない．

上記条件を満たす局面は次のように初期局面から到達可能である．

(1) 盤面の駒を先手は 1 一玉， 後手は 9 九玉のみとし，残

りの駒を適当に取り合う．

(2) 先手２二と，後手８八とを配置する．

(3) 成駒を配置する．

(4) 成っていない駒を盤上に打つことで配置．手番は先手の２二と，または後手の８八との ABCD のマスを用いた移動で調整する．

上の条件を満たす局面の数を計算する．歩兵の配置を 3〜7 筋と残りの筋で分けて考え，歩兵を２枚置く筋，歩兵を１枚置く筋に配置できるパターンをそれぞれ求める．飛車と角はそれぞれ置けないマスを考慮する．以上を踏まえた見積もりに対して，二つのと金の位置と左右反転を考慮することにより，$L > 4.65 \times 10^{62}$ が得られる．

3. 主結果

本節では本研究で得られた上界，下界およびその先行研究との比較を示す．

3.1 上界の導出

本節では以下の定理１を導出する．

定理 1. 将棋における状態空間数は高々 6.78×10^{69} である．

この上界を導出するために，大きく任意の局面を持ち駒に関して排反する３種類に分類する．以下の３つの補題は，それぞれ (1) 両プレイヤ共に持ち駒を持たない局面，(2) 一方のプレイヤの持ち駒が１枚，他方のプレイヤの持ち駒がない局面，(3) 両プレイヤの持ち駒の和が２枚以上である局面，に関するものであり，これらを足し合わせることで定理１が成立する．

補題 1. いずれのプレイヤも持ち駒をもっていない実現可能局面は高々 3.406×10^{69} である．

補題 2. どちらかのプレイヤの持ち駒が１枚だけであり，残り片方のプレイヤが持ち駒がない実現可能局面は高々 1.921×10^{69} である．

補題 3. 両プレイヤの持ち駒の和が２枚以上である実現可能局面は高々 1.452×10^{69} である．

以下，順にこれらの補題を証明する．

証明. (補題 1) この補題の証明には，行き所のない，歩兵駒，香車駒，桂馬駒が盤面にあればそれは実現不可能 (禁則事項 4) という条件による数え上げを利用する．

1-1 歩兵駒，香車駒，桂馬駒を禁則事項 (4) に引っかからないように盤面に配置する．

1-2 [1-1] で得られた配置それぞれに対し，残りの駒を盤面に配置する．

[1-1] 以下の式を $2a+2b+2c+2d+2e+2f+g+h+i+p = 18$ かつ $j+k+l=4$ かつ $m+n=4$ という条件で計算する．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{a=0}^{9}\sum_{b=0}^{9-a}\sum_{c=0}^{9-a-b}\sum_{d=0}^{9-a-b-c}\sum_{e=0}^{9-a-b-c-d}\sum_{f=0}^{9-a-b-c-d-e}\\
&\sum_{g=0}^{9-a-b-c-d-e-f}\sum_{h=0}^{9-a-b-c-d-e-f-g}\sum_{i=0}^{9-a-b-c-d-e-f-g-h}\\
&\sum_{j=0}^{4}\sum_{k=0}^{4-j}\sum_{l=0}^{4-j-k}\sum_{m=0}^{4}\sum_{n=0}^{4-m}\sum_{p=0}^{18-2a-2b-2c-2d-2e-2f-g-h-i}\\
&\binom{9}{a}\binom{9-a}{b}\binom{9-a-b}{c}\binom{9-a-b-c}{d}\\
&\times\binom{9-a-b-c-d}{e}\binom{9-a-b-c-d-e}{f}\\
&\times\binom{9-a-b-c-d-e-f}{g}\\
&\times\binom{9-a-b-c-d-e-f-g}{h}\\
&\times\binom{9-a-b-c-d-e-f-g-h}{i}\\
&\times 1^a 4^b 10^c 2^d 20^e 20^f 2^g 4^h 10^i\\
&\times\binom{18-2a-b-c-g}{j}3^j\\
&\times\binom{18-2d-b-e-h}{k}3^k\\
&\times\binom{45-2f-c-e-i}{l}4^l\\
&\times\binom{18-2a-b-c-g-j}{m}3^m\\
&\times\binom{63-2d-2f-2e-b-c-h-i-k-l}{n}4^n\\
&\times\binom{73-2a-2b-2c-2d-2e-2f-g-h-i}{p}2^p
\end{aligned}
$$

ここで a から i は歩兵の配置，j，k，l は桂馬，m，n は香車の配置を考えている．つまり盤面にすべての駒が揃っているという条件で計算する．

a から i の歩兵の配置，j，k，l の桂馬，m，n の香車の配置について詳しく説明する．歩兵についても同様のことが言えるが，桂馬，香車は行き所のない配置が将棋のルール上許されていない．行き所がなくなるのはどちらも成っていない場合である．いずれも向き次第で，桂馬は１段目と２段目か，８段目と９段目で，香車は１段目か９段目である．言い換えれば，

(1) どちらも３通りで配置できるマス

(2) 桂馬は３通りで香車は４通りで配置できるマス

(3) どちらも４通りで配置できるマス

が存在する (図 2)．ここで，歩兵を正確に配置したときに上の 1，2，3 にそれぞれ何枚配置されているかによって場合分けが必要になる．

この場合分けを行ったものが図３である．図３より，それぞれの歩兵の配置パターンが a は１通り，b は４通り $\cdots$ であることを意味している．

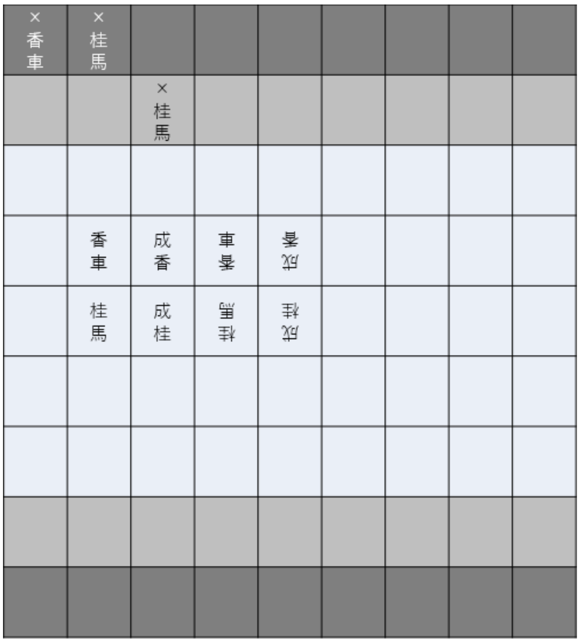

図 2 桂馬と香車の配置

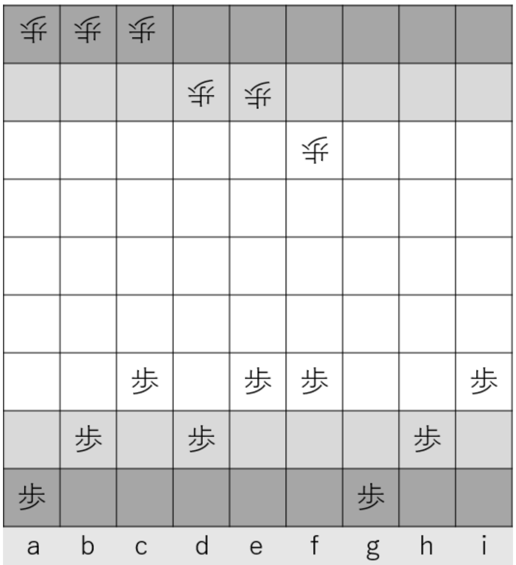

図 3 歩兵の配置

[1-2] 歩兵，香車，桂馬以外の駒の配置についても全て盤面に揃っていることを考えているため以下の式で表される．左から順に，玉将，飛車，角行，金将，銀将の配置マスと向きや成，不成を考慮している:

$$\binom{55}{2}2\binom{53}{2}4^2\binom{51}{4}4^2\binom{49}{4}2^4\binom{45}{4}4^4.$$

これらをかけ合わせることで上界値 3.406×10^{69} が得られる．したがって題意は示された． □

証明. **(補題** 2) 持ち駒が先手と後手で合わせて 1 枚のときも，どの駒が持ち駒か個別に分けて計算することによって補題 1 と同様に導出することができる．具体的にはその持ち駒が歩兵駒，香車駒，桂馬駒のいずれでもないとき [2-1] といずれかであるとき [2-2] に分けてその盤面数の計算を行う．

[2-1] 補題 1 の状況のうち，1-2 で配置される駒が 1 枚少なくなった値を計算した後，持ち駒がどちらの駒であるかということを考慮し，2 倍することによってすべて計算可能である．この値は 0.649×10^{69} 以下となる

[2-2] 持ち駒が歩兵であるとき, 香車であるとき, 桂馬であるときのそれぞれにおいて，[1-1] と同様の計算を枚数を変え再計算を行い，その和を導出する．この値は 1.272×10^{69}

[2-1],[2-2] の和を求めると 1.921×10^{69} という上界を得る．したがって題意は示された． □

証明. **(補題** 3) 持ち駒が先手と後手で合わせて 2 枚以上のときの歩兵のルール違反のみを全配置から除いた除いた局面数を導出することにより補題を示す．具体的には以下の式を $a+b+c+d+e+f+2x+y+p<37$ という条件で計算する．ここで a から f は飛車，角行，金将，銀将，桂馬，香車を表しており，x，y は歩兵，p はと金を表している．

$$\begin{aligned}
&\sum_{x=0}^{9}\sum_{y=0}^{9-x}\sum_{a=0}^{2}\sum_{b=0}^{2}\sum_{c=0}^{4}\sum_{d=0}^{4}\sum_{e=0}^{4}\sum_{f=0}^{4}\sum_{p=0}^{18-2x-y}\\
&\binom{9}{x}\binom{9-x}{y}57^x16^y\\
&\binom{81-2x-y}{2}2\\
&\times\binom{79-2x-y}{a}4^a(3-a)\\
&\times\binom{79-2x-y-a}{b}4^b(3-b)\\
&\times\binom{79-2x-y-a-b}{c}2^c(5-c)\\
&\times\binom{79-2x-y-a-b-c}{d}4^d(5-d)\\
&\times\binom{79-2x-y-a-b-c-d}{e}4^e(5-e)\\
&\times\binom{79-2x-y-a-b-c-d-e}{f}4^f(5-f)\\
&\times\binom{79-2x-y-a-b-c-d-e-f}{p}2^p\\
&\times(19-2x-y-p)
\end{aligned}$$

この値は 1.452×10^{69} 以下であるため題意は示された． □

3.2 先行研究の上界との比較

先行研究では玉の隣接と二歩を除き，さらにその中で後手玉の一マス前から王手されている局面を除いた局面の数を数えることにより状態空間数の上界を得ている．

これに対し，本研究では状態空間を (1) 両プレイヤ共に持ち駒を持たない局面，(2) 一方のプレイヤの持ち駒が 1 枚，他方のプレイヤの持ち駒がない局面，(3) 両プレイヤ

の持ち駒の和が2枚以上である局面，に分割し，その上で各状態空間上で先行研究と同様禁則事項を含む局面を除外する形での見積もりを行っている．

これらのアプローチの違いにより，全配置からみた場合，先行研究・本研究で取り除かれた実現不可能局面の条件（禁則事項）は異なった形をとる．表1はこの関係をまとめたものである．先行研究・本研究に共に，二歩に関する禁則事項1を含む局面，行き場のない歩兵の配置に関する禁則事項4を完全に除いているが，それ以外の禁則事項に関しては比較不能の関係にある．取り除いた禁則事項の数では一見，本研究よりも先行研究の方が厳しい制限を反映しているように見えるが，最終的に得られている上界としては本研究によるものの方がより高精度である．この結果は禁則事項による制限の強さの違いを示唆するものとも考えられる．

この表から，先行研究のアプローチを本研究に組み込むことにより上界をさらに改善できないか，という疑問が生じる．残念ながらそのような組み込みは禁則事項の重複の存在から自明ではなく，さらなる工夫が必要である．

表 1 除かれた禁則事項の比較

禁則		先行研究	本研究
1	二歩	○	○
2,3	玉の隣接	○	×
2,3	王手無視	△	×
4	行き所のない歩兵	○	○
4	行き所のない香車	×	△
4	行き所のない桂馬	×	△

3.3 下界の導出

本研究では篠田の解析をさらに進め，実現可能盤面を列挙することによって，下界の更新を行う．2節で述べた通り，篠田は図1の盤面を利用して下界を導出した．

本研究では，同じ図1の盤面の一部を変形したテンプレートを利用した局面の列挙を行う．具体的には，以下の変更を考慮した局面を考える:

(2-1) 手数調整用の「と金」を別の駒に変更する．
(2-2) 玉の配置を変更する．
(2-3) 図1でABにあたるマスに先手番の駒，CDにあたるマスに後手の駒を配置する（つまり手数調整用の空きマスにそれぞれの玉と同じ向きの駒を配置する）．

まず **(2-1)** に関して説明する．例えば図1の2二にあると金駒を成銀駒に変更した盤面数は

$$\sum_{x=0}^{5}\sum_{y=0}^{5-x}\sum_{z=0}^{4}\sum_{u=0}^{4-z}\sum_{a=0}^{2}\sum_{b=0}^{2}\sum_{c=0}^{4}\sum_{d=0}^{3}\sum_{e=0}^{4}\sum_{f=0}^{4}\sum_{p=0}^{17-2x-y}$$
$$\binom{5}{x}\binom{5-x}{y}57^x16^y\binom{4}{z}\binom{4-z}{u}36^z13^u$$
$$\times\binom{47-2x-y}{a}4^a(3-a)$$
$$\times\binom{68-2x-y-a}{b}4^b(3-b)$$
$$\times\binom{73-2x-y-a-b}{c}2^c(5-c)$$
$$\times\binom{73-2x-y-a-b-c}{d}4^d(4-d)$$
$$\times\binom{73-2x-y-a-b-c-d}{e}3^e(5-e)$$
$$\times\binom{73-2x-y-a-b-c-d-e}{f}3^f(5-f)$$
$$\times\binom{73-2x-y-a-b-c-d-e-f}{p}2^p$$
$$\times(18-2x-y-2z-u-p)$$

となる．ここでは一枚の銀将の位置を固定しているため盤面上の銀将の枚数を表す d の上限を3とする．また同様に盤面のと金の枚数を表す p の上限は17で計算する．

成銀駒以外への変更に対しても同様の式を立てることができる．ここでそのような変更対象としては，金将の動きをする成駒全般，さらに金将の動きをしない駒，例えば，角行（ABCDのみを用いた動きを想定），馬，銀将等がある．

このとき手数調整用の駒が成っていない駒の場合については例外的に玉の次に配置する．また，双方の手数調整用の駒が角行，馬，成っていない銀将から成り，それぞれAB，CDの2マスの往復で手数を調整する場合も，角行，馬，成っていない銀将をAB,CDへの初期配置次第でどのような盤面であれ全てのパターンを表せる．

(2-2) では，双方の玉が盤の辺に配置されている場合について計算する．つまり棋譜で表すと1筋，9筋か一段，九段が含まれるあらゆる配置の組合せで計算を行う．

(2-3) では，ABCDマスに王手にならない駒を配置することで飛車の配置制限マスhを減らす場合についても部分的に考慮する．ABCDマスに配置する駒の成不成に関わらず手数調整用の駒の次に配置することで到達可能である．

以上全てを合わせた結果，$L > 2.45 \times 10^{64}$ が得られる．

4. 5五将棋

5五将棋とは，5×5 盤面で遊ぶ将棋であり，図4のような初期配置を取る．基本ルールは将棋と変わらない．すなわち，王手無視や二歩，移動先のない歩の配置は禁止されている．5五将棋は将棋と比べると競技人口は少ないが，大会が2007年から開催されており，将棋の性質を持つ簡単なゲームとして，将棋ソフト開発の試験などに利用され

図 4 5 五将棋 初期局面

ることもある [8]．本節では 5 五将棋の状態空間数 L' について調べる．

上界について，将棋と同様に玉の隣接がないように配置し，歩のルール違反がないように歩を配置する．先行研究と同様に計算し，玉の隣接と歩のルール違反についてのみ考慮した結果は $L' < 2.06 \times 10^{19}$ となる．そこから後手玉の一マス前から王手されているパターンを部分的に除く．例えば，両方の玉が同じ筋にあってその筋には歩が無い配置でのと金以外の駒での王手などを計算する．その結果，$L' < 1.95 \times 10^{19}$ が得られる．除かれているルール違反は以下であり，

- 玉同士の隣接
- 歩兵の行き所のない配置
- 二歩
- 後手玉への王手の一部

除かれていないルール違反は以下である．

- 残りの後手玉への王手
- 先手玉への到達不可能な王手
- その他

下界についての評価は以下のとおりである：先手玉は 1 一，後手玉は 5 五の地点に配置し，手数調整用の駒は，と金とする．この局面は将棋と同様の議論で到達可能が示せる．

$$\sum_{a=0}^{2}\sum_{b=0}^{2}\sum_{c=0}^{2}\sum_{d=0}^{2} 18\binom{7}{a}4^a(3-a)\binom{16-a}{b}4^b(3-b)$$
$$\times\binom{17-a-b}{c}2^c(3-c)\binom{17-a-b-c}{d}4^d(3-d).$$

結果，$L' > 4.59 \times 10^{12}$ となる．これはと金の配置と左右反転を考慮している．

実際の状態空間数は 10^{18} から 10^{19} 程度になると考えられる．下界については，3.3 節ならびにまとめで言及している将棋の下界の改善案を適用するとより良い下界が得られる見込みである．

5. まとめ

本研究では将棋の状態空間数 L を見積もる新しい計算法を提案し，これまで知られていた $4.65\times10^{62} < L < 9.14\times10^{69}$ から $2.45\times10^{64} < L < 6.78\times10^{69}$ に改善した．また，5 五将棋の状態空間数 L' について，$4.59\times10^{12} < L' < 1.95\times10^{19}$ であることを示した．

将棋，5 五将棋とも上界・下界はまだ改善の余地がある．下界は本研究で考えたテンプレートに当てはまる配置以外の配置を列挙することによる更新が可能である．実際，以下のような微修正による改善が考えられる．

- 玉の配置を変えた後，と金を別の駒に変更する．
- 図 1 で h，k にも飛車，角があるが間に駒があり王手はかかっていない．
- 図 1 で h，k にも飛車，角があるが玉と同じ向きの飛車，角であり王手にはなり得ない．
- 先手玉が王手されているが，考えている局面より一手前に王手がかかっており，到達可能である．
- 図 1 で AB にあたるマスに後手番の香車，桂馬など王手がかからない特定の駒を配置する．後手番についても同様．つまり手数調整用の空きマスにそれぞれの玉と逆向きの駒を配置する．
- 玉の周囲でなくとも手数調整が可能であるため，手数調整用の駒と空きマスを変更する．
- 手数調整用の駒が無くとも到達可能であることを示す．

これらの微修正によりある程度の下界改善が見込めるものの，残念ながら 1 桁あるいは 2 桁分上げるような規模の本質的な改善は期待できない．下界の本質的な改善にはまた別のシステマティックなアプローチが必要である．

上界についても，禁則パターンとして玉の隣接や後手玉への王手を考慮することによる改善が可能である．ただし，これらを含む配置は，これを引く対象の「全配置」と比べるとはるかに小さいため，このアイデア単体では桁数の改善は見込めない．

これらとは別に，[9] ではランダムに生成した局面が初期局面から到達可能かどうかを判定する，モンテカルロ法的な状態空間数の推定手法が言及されている．このような手法による推定値や到達可能局面の割合の分析などは，本研究の手法の精緻化にも役立つが，その実現には到達可能性判定のための高速アルゴリズムが必要であるなどの課題が残されている．

参考文献

[1] Chinchalkar, S.: An upper bound for the number of reachable positions, *ICGA Journal*, Vol. 19, No. 3, pp. 181–183 (1996).

[2] Gourion, D.: An upper bound for the number of chess diagrams without promotion, *CoRR*, Vol. abs/2112.09386 (2021).

[3] Microsoft: ゲーム AI の難易度とは，`https://news.microsoft.com/ja-jp/2019/08/22/190822-difficulty-of-game-ai/`(閲覧日:2022 年 2 月 21 日) (2019).

[4] Park, D.: Space-state complexity of Korean chess and Chinese chess, *arXiv preprint arXiv:1507.06401* (2015).
[5] Shannon, C. E.: XXII. Programming a computer for playing chess, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Vol. 41, No. 314, pp. 256–275 (1950).
[6] Tromp, J.: ChessPositionRanking, `https://github.com/tromp/ChessPositionRanking`(閲覧日:2022 年 2 月 21 日) (2021).
[7] Tromp, J. and Farnebäck, G.: Combinatorics of go, *International Conference on Computers and Games*, Springer, pp. 84–99 (2006).
[8] 伊藤毅志：5 五将棋大会の動向 (2013 年˜ 2014 年)，研究報告ゲーム情報学 (GI)，Vol. 2015, No. 1, pp. 1–5 (2015).
[9] 篠田正人：将棋における実現可能局面数について，ゲームプログラミングワークショップ 2008 論文集， Vol. 2008, No. 11, pp. 116–119 (2008).
[10] 松原　仁，半田剣一：ゲームとしての将棋のいくつかの性質について，情報処理学会 AI 研究会，No. AI96-3, pp. 21–30 (1994).
[11] 大槻正伸，小泉康一：ゲーム木の平均分岐数と複雑さについて，技術報告 61，福島工業高等専門学校 (2020).
[12] 田中哲朗：「どうぶつしょうぎ」の完全解析，情報処理学会研究報告. GI, [ゲーム情報学]， Vol. 22, pp. C1–C8 (2009).