上がり札に相手が返せるかを考慮した二人単貧民の部分的解析

大渡 勝己[,a)]　木谷 裕紀[1,b)]

概要：二人単貧民はトランプゲーム大富豪を簡略化した二人零和完全情報ゲームであり，この勝者は両プレイヤの手札枚数に対して線形時間で決定できる．本研究では，二人単貧民において，勝者の最後の提出札に着目し，この札の上に相手が札を提出可能か，またはパスしかできないかを考慮して試合結果を細かく分ける．このとき，互いのプレイヤの最強札の強さが異なる条件下においては，この試合結果についても手札枚数に対して線形時間で求められることを示す．さらに，最強札が同じ強さの場合についても，計算機実験の結果から予想しているゲームの性質について議論する．

キーワード：大富豪，大貧民，単貧民，二人零和完全情報ゲーム，組合せゲーム，計算量，グラフ理論

A Partial Analysis of Two-player TANHINMIN Considering Whether The Opponent Can Submit A Card on The Last Card

Abstract: The winner of two-player TANHINMIN can be determined in linear time with respect to the number of cards in both players' hands. In this study, we focus on the winner's last card, and distinguish the outcome of the game by considering whether the opponent can submit a card on this card or can only pass. We show that under the condition that the strength of the strongest cards of both players is different, this result of the game can also be determined in linear time. We also discuss the properties of the game expected from the results of the computer experiments when the strongest cards are of the same strength.

1. はじめに

多くのゲームで，優れた強化学習や探索アルゴリズムによって AI が人間の実力を上回るようになって久しい．

AI は勝利のためだけに全力を尽くし，しばしば予想外のやり方で勝利へ向かってくる．一方で，人間は勝ち方そのものに美学を感じ，こだわることが少なくない．詰将棋のように，ゲームの一部を切り取ってそこに特化した遊び方があり，指し将棋の実力を問わず楽しむことができるのも，ゲームの人間世界における奥深さといえるだろう[*1]．

本稿では，主に日本で人気があるトランプゲームの大富豪（大貧民）の系統のゲームに対して，「上がり方」に着目する．

著者らはこれまで，大富豪を一枚出しのみ，特殊ルールなしに簡略化した単貧民 [1] というゲームの二人完全情報版である二人単貧民に対して，いくつかの洞察を与えてきた．二人単貧民の必勝プレイヤや最善な手，終局時の残り手札枚数のミニマックス値は，ゲーム木探索を用いずとも，手札枚数に対して線形時間で判定できる [2–4]．さらに二人単貧民の亜種となるいくつかのゲームに対しても，同様の簡潔な性質を発見している [5–7]．また，二人単貧民の必勝プレイヤの判定については，Coq による形式的証明も行なっている[*2]．

大富豪系ゲームのプレイでは，上がり方のパターンが大まかに分けて二通りある．強い札で場を流して弱い札を出して上がる場合と，強い札を最後の一枚として持っておく

1　名古屋大学未来社会創造機構 モビリティ社会研究所
Global Research Institute for Mobility in Society, Institutes of Innovation for Future Society, Nagoya University
a)　katsuki.ohto@gmail.com
b)　hironori.kiya@mirai.nagoya-u.ac.jp

*1　ただし本稿執筆時点（2021 年）において，詰将棋で圧倒的な実力を持つ人間プレイヤは指し将棋でも圧倒的な実力を示しており，遊び方が増えれば必ずしも多くの人に勝つチャンスが生まれるとは限らない．

*2　https://github.com/fugotheory/CoqDaifugo （2021.5.26 閲覧）．本稿執筆時点で，「手札がソート済みである二人単貧民」の勝敗判定アルゴリズムの妥当性の証明が完了している．

場合である．この両者を区別する境界は一意には決めがたいが，本研究では「**上がり札に相手が返せる場合**」と「**上がり札に相手が返せない場合**」に分けることを考える．

この視点を加えることで，二人単貧民をこれまでになかった「上がり札に相手が返せるか」という論点から議論する．本稿では，限定された条件下において，この点でも二人単貧民が簡潔な構造を持っていることを示していく．

2. 二人単貧民

2.1 二人単貧民の定義と試合結果の拡張

ゲームで用いられる札（カード）は，それぞれ強さを表す数値が正の整数（$1, 2, 3, ...$）として割り当てられている．各プレイヤの手札は一枚以上であれば枚数制限，強さの制限はなく，同じ強さの札が何枚含まれていてもよい．手札を決定した後，以下のようにゲームを進める．

- 先手後手を決め，先手プレイヤ，後手プレイヤの順に交代で，手札から場に一枚ずつ札を出していく．
- 場は最初，空である．本稿では，強さ 0 の札があると考える．
- 手番のプレイヤは，手札の中から場の札の値よりも大きい値の札を一枚出すことができる．出した札が次の場の札になり，手番はもう一人のプレイヤに移る．
- 手番のプレイヤは，手札を出さずに手番をもう一人のプレイヤに譲ることができる（パスをする，という）．このとき場は空になる．
- 先に手札がなくなった（上がった）プレイヤを勝者とする．

さらに本稿では，勝者決定時の状態をより詳しく分類し，ゲームの結果の拡張を行う．

- 勝者が決まった次の手番において，相手のプレイヤがパスしかできない場合，勝者の**完勝**，敗者の**完敗**としてゲームを終了する．
- 勝者が決まった次の手番において，相手のプレイヤが札を出せる場合，勝者の**逃勝**，敗者の**惜敗**としてゲームを終了する．

ゲームを通して手番は交互に移るが，ある時点で手番が来ているプレイヤ を**手番プレイヤ**，もう一人のプレイヤを**非手番プレイヤ**と呼ぶ．

単貧民において**同じ強さの札は区別不可能**であり，本稿では各プレイヤの手札を正の整数を要素とする**多重集合**によって表現する．以降では，手番プレイヤの手札 X，非手番プレイヤの手札 $\bar{X}$，場札の強さ r であるような局面は，**局面** $(X, \bar{X}, r)$ **として三つ組によって表記**する．

2.2 拡張された試合結果の優先順位

本稿で定義した単貧民の試合結果の拡張によって，単貧民に勝敗という軸以外に，最後に場を取れるかという軸を導入した．このとき，勝利し，かつ場も取れる完勝が最も良く，その逆の完敗が最も悪い結果であると定義するのは自然である．

次の問題は，「勝利する」逃勝と「最後に場を取る」惜敗のどちらを優先するかである．本研究では，このいずれを優先するかはプレイヤに委ねられているものとし，ルールとして優劣を定めてはいない．その上で，**逃勝と惜敗から自由に選ぶ**ことのできる局面は，いずれか一つにしか進めない局面より良いと考え，**選択可能**な局面[*3]として区別する．例えば図 1 は，手番側の手札が 1 と 2，非手番側の手札も 1 と 2，場が空であり，三つ組表記では $\{1, 2\}, \{1, 2\}, 0$ となる局面である．この局面では 1 から出せば惜敗，2 から出せば逃勝となるため選択可能である．さらに自分ではなく，相手に選択権がある局面も存在する．

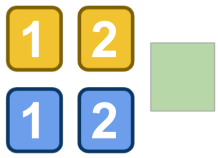

図 1 手番側が逃勝と惜敗から選択可能な局面の例．1 から出せば惜敗，2 から出せば逃勝である．

以上により，本研究で定義した二人単貧民の結果の拡張において，手番側から見た局面の優劣は

完勝
$>$ **手番側選択可能**
$>$ **逃勝，惜敗，（千日手）**
$>$ **非手番側選択可能**
$>$ **完敗**

となる．それぞれの状態に該当する局面の例を表 1 にまとめた．

なお，両プレイヤがパスを続けることが最善で千日手となる局面は，勝敗のみを競う通常の二人単貧民においては存在しない [7]．本研究で試合結果を拡張した二人単貧民においては，互いのプレイヤが完勝や惜敗を目指した場合に，強い札を温存する戦略を取ることが考えられる．計算機実験での結果，それでも千日手が最善の局面は存在しないと予想しているが，本稿で証明は行えていない[*4]．

2.3 二人単貧民の必勝プレイヤ判定

非負整数の多重集合について考える．これは単貧民の札の集合と捉えてよい．非負整数の多重集合 V_0, V_1 を，各要素の値を持った頂点の集合と捉え，

$$E_0 = \{(i, j) | i \in V_0, j \in V_1, i > j\}$$

[*3] 最終結果を逃勝にも惜敗にもできる局面として定義する．必ずしも，その局面における手で逃勝か惜敗かに分岐する局面，というわけではない．

[*4] 両プレイヤの最強札が異なる場合には，本稿の主結果から千日手局面が存在しないことは明らかである．

表 1 拡張した試合結果に手番側が該当する二人単貧民の局面の例

完勝	$\{1\}, \{1\}, 0$
手番側選択可能	$\{1, 2\}, \{1, 2\}, 0$
逃勝	$\{1\}, \{2\}, 0$
惜敗	$\{1, 1, 3\}, \{2\}, 0$
非手番側選択可能	$\{2, 2\}, \{1, 3\}, 0$
完敗	$\{1, 1\}, \{2\}, 0$

のように定義した E_0 を辺集合とする二部グラフを考える．

E_0 は V_0 の要素から, V_1 のより小さい値の要素への辺の集合である．このような条件を満たす二部グラフ (V_0, V_1, E_0) の最大マッチングの組の数を $\mu(V_0, V_1)$ と表記する．例として，図 2 に $\mu(\{2, 3, 4, 6, 8\}, \{1, 2, 5, 6, 7\}) = 4$ である様子を図示した．

以降では最大マッチングの組の数を単に**マッチング数**と呼び，E_0 の定義に従ったマッチングを V_0 から V_1 への**下向きマッチング**と呼ぶ．

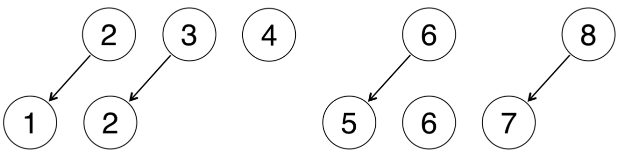

図 2 関数 μ の計算例

$\mu(V_0, V_1)$ は双方の頂点集合の要素が小さい順または大きい順にソートされていれば，頂点の総数 N に対して時間計算量 $\mathcal{O}(N)$，空間計算量 $\mathcal{O}(1)$ で計算可能である[*5]．なお，空間計算量においては元の多重集合自体の容量は含まないものとする．

また，非負整数の空でない多重集合 V から，最小の要素一つを除いた多重集合を V_- と表記する．

このとき次の命題 1 により二人単貧民における必勝プレイヤを判定できる [3].

命題 1. 二人単貧民の任意の局面 $(X, \bar{X}, r)$ において

$$\mu(X, \bar{X}_- + \{r\}) > \mu(\bar{X}, X_-)$$

ならば手番プレイヤ必勝，そうでなければ非手番プレイヤ必勝である．

手札から一枚除いたり，場札を加えた後の最大マッチング数を計算する上では，変化した手札を新たに保存する必要はなく，μ の計算内部に分岐を加えて元の手札から計算することが可能である．そのため命題 1 の式の時間計算量，空間計算量はともに μ の計算量と同等である．

本稿では，命題 1 の式のように,「手番側手札から非手番側手札への下向きマッチング」の数と「非手番側手札から手番側手札への下向きマッチング」の数を比較するような式がいくつか登場する．このとき前者を「手番側の」マッチング，後者を「非手番側の」マッチングと呼ぶ．

[*5] 本稿では，整数の一度の加減算の計算量を $\mathcal{O}(1)$，一つの整数の保存容量を $\mathcal{O}(1)$ とする．

3. 主結果

本稿の主結果は，試合結果を拡張した二人単貧民において,「互いのプレイヤの最強札の強さが異なる」場合に限定した解析結果である．

定理 1. 二人単貧民の拡張した試合結果は，両プレイヤそれぞれの最強の札の強さが異なる任意の局面において，手札がソートされていれば手札の総数 N に対して時間計算量 $\mathcal{O}(N)$，空間計算量 $\mathcal{O}(1)$ で計算可能である．

この根拠が次の定理 2 である．

定理 2. 二人単貧民の拡張した試合結果は，両プレイヤの手札の強さが異なる任意の局面に対してアルゴリズム 1 によって計算できる．

アルゴリズム 1 最強札が異なる場合の拡張された試合結果の判定

Input: 局面 $(X, \bar{X}, r)$
Output: 拡張された試合結果
$a := \mu(X, \bar{X}_- + \{r\}) > \mu(\bar{X}, X)$
$b := \mu(X, \bar{X}_- + \{r\}) > \mu(\bar{X}, X_-)$
$c := \mu(X, \bar{X} + \{r\}) > \mu(\bar{X}, X_-)$
$a \wedge \max X > \max \bar{X}$ のとき，手番側**完勝**
$\neg a \wedge b \wedge \max X > \max \bar{X}$ のとき，**手番側選択可能**
$b \wedge \max X < \max \bar{X}$ のとき，手番側**逃勝**
$\neg b \wedge \max X > \max \bar{X}$ のとき，手番側**惜敗**
$\neg b \wedge c \wedge \max X < \max \bar{X}$ のとき，**非手番側選択可能**
$\neg c \wedge \max X < \max \bar{X}$ のとき，手番側**完敗**

アルゴリズム 1 は，手札がソートされていれば手札の総数 N に対して時間計算量 $\mathcal{O}(N)$，空間計算量 $\mathcal{O}(1)$ で計算可能である．

定理 2 の証明のため，以下の補題 1〜3 を示す．以降では，自身が完勝できるか，逃勝を惜敗より優先した場合に必ず逃勝ができることを**逃勝可能**，逆に必ず完勝もしくは惜敗できることを**惜敗可能**と呼ぶ[*6]．

補題 1. 二人単貧民の任意の局面 $(X, \bar{X}, r)$ において，$\mu(X, \bar{X}_- + \{r\}) > \mu(\bar{X}, X_-)$ ならば手番プレイヤが逃勝可能，そうでなければ非手番プレイヤが逃勝可能である．

証明. 逃勝可能であることは，言い換えれば通常の二人単貧民において必勝であることに等しい．そのため命題 1 により成立する． □

[*6] 本研究では完勝は逃勝や惜敗より上位と捉え，完勝できるが惜敗できない場合も「惜敗可能」としている．しかし，この区切り方が問題の性質を適切に捉えているかどうかは検討の余地があり，今後の研究の進展によっては定義の変更も視野に入れている．

補題 2. 二人単貧民の任意の局面 $(X, \bar{X}, r)$ において，$\max X > \max \bar{X}$ ならば手番プレイヤが惜敗可能，$\max X < \max \bar{X}$ ならば非手番プレイヤが惜敗可能である．

証明. 相手のどの手札よりも強い札を所持しているプレイヤは，そのうち一枚を相手が上がるか自分の最後の一枚になるまで取っておき，他の札は出せるときに出していく，という戦略を取るだけで惜敗または完勝することが可能である． □

補題 3. 二人単貧民の任意の局面 $(X, \bar{X}, r)$ において，

$$\max X > \max \bar{X} \text{ かつ } \mu(X, \bar{X}_{-} + \{r\}) > \mu(\bar{X}, X)$$

ならば手番プレイヤが完勝，

$$\max X < \max \bar{X} \text{ かつ } \mu(X, \bar{X} + \{r\}) \leq \mu(\bar{X}, X_{-})$$

ならば非手番プレイヤが完勝である．逆に，$\max X \neq \max \bar{X}$ を満たす任意の局面において，これらの条件を満たすことなくいずれかのプレイヤの完勝であることはない．

補題 3 による完勝判定は図 3 のように適用する．

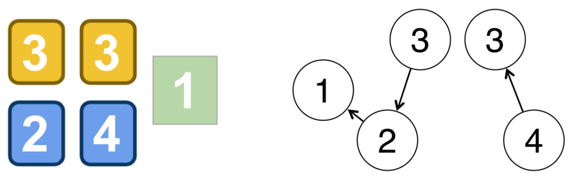

図 3 手番側完勝な局面の例．$4 > 3$ かつ $\mu(\{2, 4\}, \{3, 3\} - \{3\} + \{1\}) = 2 > 1 = \mu(\{3, 3\}, \{2, 4\})$ により手番側完勝である．

この条件は逃勝や惜敗の条件ほど自明ではないので，3.1 節と 3.2 節で必要条件と十分条件に分けて証明する．本節では，直感的な理解のための解釈を述べておく．

補題 3 のうちマッチング数の条件は命題 1 で必勝プレイヤを判定する式によく似ている．命題 1 では互いのプレイヤの最弱札へ下向きのマッチングを引くことを許さないが，補題 3 の完勝の条件の判定では，完勝する側の最弱札へは相手の札からマッチングを引いてよいという違いがある．

この違いは，上がり札に対する扱いの違いから来ていると考えられる．つまり，勝つだけで良ければ上がり札の上に札を出される機会がないが，完勝のためには，上がり札の上に札が出されてもいけない，という前提でマッチング数を比較している，と捉えることができる．

別の視点からも見てみよう．最弱札にもマッチングを引くのではなく，実はもう一枚弱い札があってその札が除かれている，と考えてみる．あるプレイヤが完勝であるということは，言い方を変えれば，完勝の後相手がパスをして，実はもう一枚あった札を最後に出すことができる，とも考えられる．

さらに，「もう一枚追加した最弱札を最後に残して勝てる」ならば，そのためには少なくとも「もう一枚の札を加えても勝てる」ことが必要である．3.1 節ではこの考え方で必要性を証明する．

3.1 完勝条件の必要性の証明

補題 3 のうちマッチング数の条件の必要性を補題 4 とし，これを証明する．

補題 4. 二人単貧民の任意の局面 $(X, \bar{X}, r)$ において，$\mu(X, \bar{X}_{-} + \{r\}) > \mu(\bar{X}, X)$ は手番プレイヤ完勝の必要条件であり，$\mu(X, \bar{X} + \{r\}) \leq \mu(\bar{X}, X_{-})$ は非手番プレイヤ完勝の必要条件である．

証明. 非手番側の完勝について考える．局面 $(X, \bar{X}, r)$ が非手番側完勝であるためには，局面 $(X, \bar{X} + \{1\}, r)$ が非手番側必勝であることが必要である．この必要十分条件は命題 1 より，

$$\mu(X, \bar{X} + \{r\}) \leq \mu(\bar{X} + \{1\}, X_{-})$$

である．最弱である 1 の札からは X_{-} 内のどの札へも下向きマッチングを作れないため，

$$\mu(\bar{X} + \{1\}, X_{-}) = \mu(\bar{X}, X_{-})$$

であり，$\mu(X, \bar{X} + \{r\}) \leq \mu(\bar{X}, X_{-})$ は非手番側完勝の必要条件である．

手番側完勝の場合も同じ考え方を適用するが，次のように局面を変形して証明する[*7]．局面 $s = (X, \bar{X}, r)$ に対して，互いのすべての手札と場札を 1 強くした局面 $s' = (X', \bar{X}', r + 1)$ を考える．局面 s が手番側完勝であるためには，この局面 s' も手番側完勝である必要がある．

s' が完勝である必要条件として，s' の手番側の手札に 1 を一枚加えた局面 $(X' + \{1\}, \bar{X}', r + 1)$ で手番側が必勝であることが挙げられる．その必要十分条件は命題 1 より，

$$\mu(X' + \{1\}, \bar{X}'_{-} + \{r + 1\}) > \mu(\bar{X}', X')$$

であり，1 の札は $\bar{X}'$ 内の札にも場札 $r + 1$ にも下向きマッチングを作れない．よって

$$\mu(X' + \{1\}, \bar{X}'_{-} + \{r + 1\}) = \mu(X', \bar{X}'_{-} + \{r + 1\})$$

である．

最後に，s と s' でマッチングの構造は不変なため，$\mu(X', \bar{X}'_{-} + \{r + 1\}) = \mu(X, \bar{X} + \{r\})$ かつ $\mu(\bar{X}', X') = \mu(\bar{X}, X)$ であり，$\mu(X, \bar{X}_{-} + \{r\}) > \mu(\bar{X}, X)$ は s で手番側完勝の必要条件である． □

補題 3 の最強札の条件について，必要性は明らかである．

*7 非手番側と同様に論理を展開すると，必要条件が $\mu(X + \{1\}, \bar{X}_{-} + \{r\}) > \mu(\bar{X}, X)$ となる．すると空の場，つまり $r = 0$ のとき最弱札からの下向きマッチングができる可能性があり，補題 4 の式が出てこない．

補題 5. 二人単貧民の任意の局面 $(X, \bar{X}, r)$ において，$\max X \neq \max \bar{X}$ であるならば，$\max X > \max \bar{X}$ は手番プレイヤ完勝の必要条件であり，$\max X < \max \bar{X}$ は非手番プレイヤが完勝の必要条件である．

補題 4 と補題 5 により，補題 3 のうち手番側と非手番側それぞれの完勝の必要条件を示せた．

3.2 完勝条件の十分性の証明

次は十分条件を帰納法によって示していくが，まず準備として補題 6，補題 7 を示す．局面の遷移の表記を簡単にするため，二人単貧民の局面 $s = (X, \bar{X}, r)$ から手 a で進めた局面（s の非手番側視点での局面）を $(\bar{X}, X - \{a\}, a)$ と表記する．パスの場合は X から $\{0\}$ を引いても X のまま変化しない，と定義している．

補題 6. 二人単貧民の任意の局面 $(X, \bar{X}, r)$ において，$\max X > \max \bar{X}$ かつ $\mu(X, \bar{X}_- + \{r\}) > \mu(\bar{X}, X)$ ならば，アルゴリズム 2 に従う合法手 a によって，手番側は非手番側に一枚も札を出させずに完勝可能か，もしくは次の局面 $(\bar{X}, X - \{a\}, a)$ において $\max(X - \{a\}) > \max \bar{X}$ かつ $\mu(X - \{a\}, \bar{X}_-) \geq \mu(\bar{X}, X - \{a\} + \{a\})$ を満たす[*8]．

アルゴリズム 2 最強札が異なる場合の完勝戦略

二人単貧民の局面 $(X, \bar{X}, r)$ において，出せる札が無いか，または $|X| > 1$ かつ $|\bar{X}| > 1$ かつ場に出せる唯一の札を出すと $\max X > \max \bar{X}$ の関係が崩れる場合はパスをする．それ以外の場合は出せる札のうち最小の札を出す．

証明. アルゴリズム 2 の選ぶ手のそれぞれに対して，マッチング数の変化を考える．札を出す手については最強札の変化も考える．

まず，出せる札がないときはパスをする．このとき場札には下向きマッチングを作れていないため，手番側のマッチング数は変化なく，非手番側のマッチング数は高々 1 の増加であるのでマッチング数の条件を満たす．

次に，$|X| > 1$ かつ $|\bar{X}| > 1$ かつ，出せる唯一の札を出すと「最強札が相手より大きい」という条件が崩れるときもパスをする．このとき，非手番側の最強札 $\max \bar{X}$ について，この札に下向きにマッチング可能な X 内の札は $\max X$ の一枚だけであり，場札に対してマッチング可能な唯一の札も同じ札であるため，パスをしても手番側のマッチング数は減少しない．非手番側のマッチング数は高々 1 の増加であるので，この場合もマッチング数の条件を満たす．

最後に，上記に当てはまらない場合は出せる最小札を出す．

$|X| = 1$ のとき，$\mu(X, \bar{X}_- + \{r\}) = 1 > \mu(\bar{X}, X)$ ならば，$\mu(\bar{X}, X) = 0$ より相手は自分の上がり札の上に返すことができず一手で完勝である．

$|\bar{X}| = 1$ のときも，$\mu(X, \bar{X}_- + \{r\}) = 1 > \mu(\bar{X}, X)$ となり，札を出すことで最強札の大小関係が崩れる可能性はある[*9]が，$\mu(\bar{X}, X) = 0$ より手番側のどの札に対しても非手番側は返せずに手番側の完勝である．

それ以外のとき，最強札の大小関係が変化することはない．出せる最小札を出すことにより，手番側のマッチング数は 1 小さくなり，非手番側はマッチング構造が変化しないのでマッチング数の条件を満たす． □

補題 7. 二人単貧民の任意の局面 $(X, \bar{X}, r)$ において，$\max X < \max \bar{X}$ かつ $\mu(X, \bar{X} + \{r\}) \leq \mu(\bar{X}, X_-)$ ならば，任意の合法手 a に対して，一手で勝つことはできず，次の局面 $(\bar{X}, X - \{a\}, a)$ において $\max(X - \{a\}) < \max \bar{X}$ かつ $\mu(X - \{a\}, \bar{X}) < \mu(\bar{X}, (X - \{a\})_- + \{a\})$ を満たす．

証明. まず，どの手を出しても，最強札同士の強弱関係は変化しない．その上で，一手で勝てる場合，札を出す場合，パスをする場合の三通りに分けて考える．パスの場合は非手番側のマッチング数の変化量によってさらに場合分けを行う．

もし一手で勝つことができるならば，$\mu(X, \bar{X} + \{r\}) = 1 > 0 = \mu(\bar{X}, X_-)$ となりマッチング数の前提条件に矛盾する．よって，そのような局面ではない．

札を出す場合，手番側のマッチング数は少なくとも 1 減り，非手番側のマッチング数が減ることはないので，マッチング数の条件を満たす．

パスをする場合も，手番側のマッチング数が増えることはないので，非手番側のマッチング数が 1 増えるときにはマッチング数の条件を満たす．

パスをしても非手番側のマッチング数が変化しない場合を考える．非手番側のマッチング数が変化しない，つまり $\mu(\bar{X}, X_- + \{0\}) = \mu(\bar{X}, X_-)$ のとき，これは $\bar{X}$ 内のすべての札に元からすでに下向きマッチングがあることと同値であるため，

$$\mu(\bar{X}, X_-) = |\bar{X}|$$

が成り立つ．$\max X < \max \bar{X}$ のため

$$\mu(X, \bar{X}) < |\bar{X}| = \mu(\bar{X}, X_-) = \mu(\bar{X}, X_- + \{0\})$$

となり，この場合もマッチング数の条件を満たしている． □

それでは，帰納法により完勝条件の十分性を示す．

補題 8. 二人単貧民の任意の局面 $(X, \bar{X}, r)$ において，$\max X > \max \bar{X}$ かつ $\mu(X, \bar{X}_- + \{r\}) > \mu(\bar{X}, X)$ は手番プレイヤ完勝の十分条件であり，$\max X < \max \bar{X}$ かつ $\mu(X, \bar{X} + \{r\}) \leq \mu(\bar{X}, X_-)$ は非手番プレイヤ完勝の十分条件である．

[*8] $a = 0$ ならば $\mu(\bar{X}, X - \{a\} + \{a\}) \neq \mu(\bar{X}, X)$ であることに注意されたい．

[*9] 局面 $\{1, 2\}, \{1\}, 1$ で 2 を出すような局面が該当する．

証明． 手札 1 枚ずつのとき，手番側完勝であるのは自分の札が場に出せてかつ相手の札以上の強さである場合であり，$\mu(X, \bar{X}_{-} + \{r\}) = 1 > 0 = \mu(\bar{X}, X)$ は十分条件である．非手番側完勝であるのは自分の札が場に出せないかつ相手の札以下の強さである場合であり，$\mu(X, \bar{X} + \{r\}) = 0 \leq 0 = \mu(\bar{X}, X_{-})$ は十分条件である．

手札の総数が k（≥ 2）枚の任意の局面において，補題 8 の命題が成り立っていると仮定し，手札総数 $k+1$ 枚の任意の局面 $s = (X, \bar{X}, r)$ について次の A〜D の四つの場合に分けて検証する．

A. $\max X > \max \bar{X}$ かつ $\mu(X, \bar{X}_{-} + \{r\}) > \mu(\bar{X}, X)$ が成り立っており，アルゴリズム 2 において札を出す条件を満たす場合，補題 6 より相手に一枚も出させず完勝するか，仮定により手札総数 k で手番側が完敗の条件を満たす局面に遷移可能であるため s は完勝局面である．

B. $\max X < \max \bar{X}$ かつ $\mu(X, \bar{X} + \{r\}) \leq \mu(\bar{X}, X_{-})$ を満たす局面でパスを選んだ場合，補題 7 により，A の条件を満たす局面に必ず遷移するため s は完敗局面である．

C. $\max X > \max \bar{X}$ かつ $\mu(X, \bar{X}_{-} + \{r\}) > \mu(\bar{X}, X)$ が成り立っており，アルゴリズム 2 においてパスをする条件を満たす場合，補題 6 よりパスで B の条件を満たす局面に必ず遷移するため s は完勝局面である．

D. $\max X < \max \bar{X}$ かつ $\mu(X, \bar{X} + \{r\}) \leq \mu(\bar{X}, X_{-})$ を満たす局面で札を出した場合，補題 7 により，一手で勝つことはできず，仮定より手札総数 k で手番側が完勝となる条件を満たす局面に遷移するため，s は完敗局面である．

以上 A〜D より，手札総数 $k+1$ 枚のすべての局面においても補題 8 の命題が成り立っている．

ゆえに，任意の局面において補題 8 が成り立つ． □

3.3 全体の証明

補題 4，5，8 によって必要条件と十分条件が揃い，補題 3 を示すことができた．最後に，補題 1〜3 を用いて定理 2 を示す．

証明． アルゴリズム 1 において，完勝，完敗の条件は補題 3 により示された．いずれのプレイヤの完勝でもない場合，補題 1 と補題 2 で示した条件により逃勝と惜敗の両方が可能であるプレイヤはすなわち選択可能である．それぞれのプレイヤが片方だけを満たした場合は，手番側の逃勝または惜敗局面として確定する．

次に，任意の局面 $(X, \bar{X}, r)$ において，$\max X \neq \max \bar{X}$ を満たすならばアルゴリズム 1 が必ず結果を返すことを示す．これはアルゴリズム中の a, b, c について，a ならば b，かつ b ならば c を示すことで達成される．$\mu(\bar{X}, X) \geq \mu(\bar{X}, X_{-})$ と $\mu(X, \bar{X} + \{r\}) \geq \mu(X, \bar{X}_{-} + \{r\})$ から，これらは明らかであるため，$\max X \neq \max \bar{X}$ の条件下でアルゴリズム 1 は拡張した試合結果を計算できる． □

最終的に，定理 2 の系として定理 1 を得て，本稿で拡張した二人単貧民の試合結果は，互いの最強札が異なる条件の範囲内では，手札総数に対して線形時間で計算可能であることが示された．

4. 全体の解析に向けて

過去の二人単貧民とその亜種のゲームに対する先行研究 [3–7] においては，同じ強さの札が複数枚あるかどうかは議論に影響を及ささなかった．本研究において，最強札が同じ場合に線形時間で答えを出せないことを示してはいないが，最強札が同じ強さである場合に難しくなる可能性を提示する．

3 節の議論から明らかなように，全体の最強札をどちらかのプレイヤだけが持っていれば，その時点でそのプレイヤが完敗でも惜敗でもないことが確定する．一方で双方のプレイヤの最強札が同じ場合には，自分が先に最強札を出せば完勝や惜敗ができなくなってしまうが，いつまでも出さずにいると今度は相手に完勝されてしまう．

このように，最強札をどの時点で出すか，出させるかのタイミングが問題になっており，最強札が違う場合の問題より難しくなっている可能性がある．もしこの違いによって必要な計算量が異なるとすれば非常に興味深い．

一方で，最強札の強さが同じでも，この問題がそれほど難しくない可能性を提示する計算機実験の結果もある．

予想 1. 試合結果を拡張した二人単貧民において，
- パス
- 出せる札の中で最弱の札
- 出せる札の中で二番目の札
- 手札全体の下から三番目の札

のどれかに最善手の一つが必ず含まれ，さらに非手番側選択可能のとき以外は「手札全体の下から三番目の札」を除いても最善手が含まれる．

二人単貧民の勝敗のみを競う場合，「パス」「出せる札の中で最弱の札」「手札全体の下から二番目の札」のどれかに最善手が常に含まれる [7]．同じように，試合結果を拡張した二人単貧民においても限られた手の中に最善手が含まれているならば，もし線形時間で勝敗を判定できる程度の複雑さだとしても不思議ではない．

現時点ではどちらが正しいのか証明を与えるには至っておらず，今後も検証を続けていく．3 節で触れた千日手局面の有無についても同時に解決が望まれる．

予想 2. 試合結果を拡張した二人単貧民において，互いにパスをし続けるべき局面は存在しない．

5. 関連研究

大富豪は AI の大会[*10]が行われるなど AI の研究も盛ん

*10 http://www.tnlab.inf.uec.ac.jp/daihinmin/（2021.5.26 閲覧）

であり，ゲームの性質 [8–11] の研究であったり，モンテカルロ法 [12–18]，ニューラルネットワーク [14,15,19,20]，強化学習 [16,17,19,21]，ゲーム中の手札推定 [16,20,22] や相手モデリング [23]，単貧民による終盤データベース [24] などが適用されてきた．また多人数ゲームの一例としてのレーティング研究 [25,26] や，不完全情報ゲームにおける不完全情報の重要性の検証 [8] など研究は多岐にわたる．

組合せゲームの分野でカードゲームを扱った研究としてはババ抜き，[27] 七並べ [28]，UNO [29]，Hanabi [30]，ラミーキューブ [31] に対する研究などがある．また，本研究のようにゲームの勝敗をさらに詳しく分類した既存研究としては，量子三目並べの研究 [32] がある．

謝辞

この研究は，株式会社 quantum*11と電気通信大学西野順二研究室*12のサポートを受けて完成に至りました．この場を借りて深く御礼申し上げます．

参考文献

[1] 西野順二：単貧民における多人数完全情報展開型ゲームの考察，ゲームプログラミングワークショップ 2007 論文集，pp. 66–73 (2007).
[2] 木谷裕紀，小野廣隆：二人単貧民の必勝判定問題，火の国情報シンポジウム 2017 論文集, B5-4 (2017).
[3] 木谷裕紀，小野廣隆：二人単貧民の必勝判定アルゴリズムとその拡張について，火の国情報シンポジウム 2018 論文集, A3-4 (2018).
[4] 大渡勝己，木谷裕紀：負け側の残り枚数を最大化する二人単貧民の解析，ゲームプログラミングワークショップ 2020 論文集，pp. 131–138 (2020).
[5] 木谷裕紀, 大渡勝己, 小野廣隆：８切りルールを含む二人単貧民の必勝判定問題, 情報処理学会研究報告, 2018-GI-40，No. 3, pp. 1–5 (2018).
[6] 木谷裕紀，大渡勝己，小野廣隆：不完全情報二人単貧民分析のためのオラクルモデル，ゲームプログラミングワークショップ 2019 論文集，pp. 258–265 (2019).
[7] 大渡勝己，木谷裕紀：二人単貧民の消費枚数に関する勝利条件の一般化とその解析，ゲームプログラミングワークショップ 2020 論文集，pp. 30–37 (2020).
[8] 西野順二，西野哲朗：大貧民における偶然手番感度，情報処理学会研究報告, 2013-GI-29，No. 5, pp. 1–8 (2013).
[9] 森近泰匡，飯田弘之，中川武夫：情報力学に基づくコンピュータ・ゲーム「大貧民」に関する研究，情報処理学会研究報告, 2013-GI-30，No. 5, pp. 1–8 (2013).
[10] 大田　観，但馬康宏，菊井玄一郎：コンピュータ大貧民における場の流しやすさと席順の関係調査，情報処理学会研究報告, 2016-GI-36，No. 5, pp. 1–7 (2016).
[11] 大渡勝己，田中哲朗：大貧民の空場におけるパスの有効性の検証，情報処理学会研究報告, 2017-GI-37，No. 11, pp. 1–8 (2017).
[12] 須藤郁弥，篠原　歩：モンテカルロ法を用いたコンピュータ大貧民の思考ルーチン設計，第 1 回 UEC コンピュータ大貧民シンポジウム (2010).
[13] 漆畑雅士：多人数不完全情報ゲームに対する局面評価値を用いたモンテカルロ法 (計算理論とアルゴリズムの新潮流)，数理解析研究所講究録，No. 1894, pp. 84–88 (2014).
[14] 地曳隆将，松崎公紀：大貧民における棋譜データからの提出手役評価関数の学習，情報処理学会研究報告, 2014-GI-31，No. 15, pp. 1–7 (2014).
[15] 岡　和人，松崎公紀：札譜データの学習を用いた大貧民モンテカルロプレイヤの強化，第 56 回プログラミング・シンポジウム予稿集，pp. 13–24 (2015).
[16] 大渡勝己，田中哲朗：方策勾配を用いた教師有り学習によるコンピュータ大貧民の方策関数の学習とモンテカルロシミュレーションへの利用，情報処理学会研究報告, 2016-GI-35，No. 10, pp. 1–8 (2016).
[17] 川岸成輝，岡田直也，永田祐一，小野典彦：モンテカルロ大貧民プレイヤの自己対戦を用いた良好な棋譜データの抽出とシミュレーション方策の学習，計測自動制御学会第 46 回知能システムシンポジウム (2019).
[18] 富岡　聖，大久保誠也，湯瀬裕昭，武藤伸明：コンピュータ大貧民における各種モンテカルロ法の検討，情報処理学会研究報告, 2021-GI-45，No. 12, pp. 1–8 (2021).
[19] 桑原和人，保木邦仁：大貧民の状態価値 (期待順位) の強化学習，情報処理学会研究報告, 2018-GI-39，No. 7, pp. 1–8 (2018).
[20] 神田直樹，伊藤毅志：コンピュータ大貧民における LSTM を用いた手札推定，情報処理学会研究報告, 2018-GI-39，No. 8, pp. 1–8 (2018).
[21] 坂田浩平，大橋　健：大富豪におけるペア温存戦略基準の獲得，ゲームプログラミングワークショップ 2008 論文集，pp. 67–72 (2008).
[22] 平嶋遼馬，鈴木徹也：コンピュータ大貧民でのモンテカルロ法における相手手札推定率と勝率との関係，情報処理学会第 76 回全国大会講演論文集，pp. 607–608 (2014).
[23] 伊藤祥平，但馬康宏，菊井玄一郎：コンピュータ大貧民における高速な相手モデル作成と精度向上，情報処理学会研究報告, 2013-BIO-36，Vol. 36, No. 4, pp. 1–3 (2013).
[24] 西野順二，西野哲朗：多人数不完全情報ゲームの簡略化評価値による探索を用いた終盤データベースの構築，情報処理学会論文誌数理モデル化と応用（TOM），Vol. 3, No. 2, pp. 11–21 (2010).
[25] 森田茂彦，松崎公紀：大貧民における初期手札の不均等性を考慮したレーティングアルゴリズムの提案，情報処理学会研究報告, 2014-GI-31，No. 14, pp. 1–5 (2014).
[26] 五ヶ谷純平, 大久保誠也, 若月光夫, 西野哲朗：コンピュータ大貧民におけるレーティング手法について，情報処理学会研究報告, 2020-GI-43，No. 16, pp. 1–8 (2020).
[27] 木谷裕紀，小野廣隆：手札公開ババ抜きについて，ゲームプログラミングワークショップ 2018 論文集, pp. 199–203 (2018).
[28] 木谷裕紀，末續鴻輝：組合せゲーム理論を用いた七並べの解析，情報処理学会研究報告, 2020-GI-43，No. 28, pp. 1–5 (2020).
[29] Demaine, E. D., Demaine, M. L., Uehara, R., Uno, T. and Uno, Y.: Uno is hard, even for a single player, *International Conference on Fun with Algorithms*, Springer, pp. 133–144 (2010).
[30] Baffier, J.-F., Chiu, M.-K., Diez, Y., Korman, M., Mitsou, V., van Renssen, A., Roeloffzen, M. and Uno, Y.: Hanabi is np-hard, even for cheaters who look at their cards, *Theoretical Computer Science*, Vol. 675, pp. 43–55 (2017).
[31] van Rijn, J. N., Takes, F. W. and Vis, J. K.: The Complexity of Rummikub Problems, *https://arxiv.org/abs/1604.07553* (2016).
[32] 石関　匠，松浦昭洋：量子三目並べの必勝法解析，ゲームプログラミングワークショップ 2010 論文集，pp. 101–107 (2010).

*11 https://quantum.ne.jp/ （2021.5.26 閲覧）
*12 https://sites.google.com/view/konohenfuzzy （2021.5.26 閲覧）