

# 負け側の残り枚数を最大化する二人単貧民の解析

大渡 勝己<sup>a)</sup> 木谷 裕紀<sup>1,b)</sup>

**概要:** 二人単貧民はトランプゲームの大富豪（大貧民）を簡略化した二人零和確定完全情報ゲームである。二人単貧民において勝敗のみに着目した場合、必勝プレイヤーと必勝の戦略は手札の総数  $N$  に対して  $\mathcal{O}(N)$  時間で計算できることが知られている。一方本研究では、二人単貧民において負け側の残り手札枚数を得点として扱い、できる限り相手に出させずに勝ち、逆に負けるとしてもできる限り多く出すことを競う設定を考え、検証を行った。結果として、この得点のミニマックス値と得点を最大化する提出札の必要十分な範囲のいずれも  $\mathcal{O}(N)$  時間で計算できることを示し、得点最大化とゲーム中のパスの回数や手数との間に密接な関係があることも確かめた。

**キーワード:** 大富豪, 単貧民, ゲーム, 最適戦略, アルゴリズム, 計算量, グラフ理論

## An analysis of the number of remaining cards of losers in two-player TANHINMIN

OHTO KATSUKI<sup>a)</sup> KIYA HIRONORI<sup>1,b)</sup>

**Abstract:** Two-player TANHINMIN is a two-player zero-sum perfect information game that is a simplified version of a card game called DAIFUGO or DAIHINMIN. Previous studies showed that deciding the winning player and the winning strategy can be computed in  $\mathcal{O}(N)$  time when the total number of cards is  $N$ . In this paper, we consider the scoring rule of TANHINMIN. In this rule, we regard the number of cards of the loser as a score and each player competes to achieve as many scores as possible. As a result, we show that both the minimax value of this score and the necessary and sufficient range of discarded cards to maximize the score can be computed in  $\mathcal{O}(N)$  time, and that there is a close relationship among the score maximization, the number of passes and the number of moves.

### 1. はじめに

「君が手札を残り 2 枚にするまでに、僕の手札を 5 枚残すことが可能だ。ただ君はその 2 枚を永遠に出すことができないんだ。そう、このゲームは僕の勝ちだよ。君はこのゲームで 7 回のパスをしなければならぬ。僕は 3 回のパスをして、15 回目の僕の手番でジ・エンドさ。」

大富豪（大貧民）は主に日本で広く遊ばれているトランプゲームである。大富豪を一枚出しのみ、特殊ルールなしとして簡略化したゲームが単貧民 [1] であり、組合せゲーム理論の研究対象として扱われている。

単貧民のうち二人で行う二人単貧民はミニマックス法により、勝敗と最適戦略を計算可能な最も基本的な対象である。過去の研究によって、二人単貧民の必勝プレイヤーの判定と必勝戦略は、ゲーム木探索を用いずとも手札枚数に対して線形時間で計算できることが示されている [2][3][4]。さらに二人単貧民の亜種となるいくつかのゲームに対しても、同様の簡潔な性質を発見している [5][6]。

一方で、人間プレイヤーがゲームをプレイする場合には、勝敗以外の点も考慮される場合がある。例えばリバーシや囲碁は「できる限り陣地を広げる」ゲームであることから、勝ち負けに関わらず陣地を最大化する手を選ぶことが望ましいとされている。

同じように、単貧民は「相手が札をすべて出すより先に自分の札を出し切る」ゲームであるため、「できる限り相手に札を出さず、自分の札は一枚でも多く出す」という戦

<sup>1</sup> 名古屋大学大学院情報学研究科 数理情報学専攻  
Department of mathematical Informatics, Graduate School of Informatics, Nagoya University

<sup>a)</sup> katsuki.ohito@gmail.com

<sup>b)</sup> kiya.hironori@f.mbox.nagoya-u.ac.jp

略の指針が考えられる。これは負けたプレイヤーの残り手札枚数をゲームの得点として扱うことで定式化できる。つまり、相手に2枚残して勝てば+2点、自分が3枚残って負ければ-3点という具合に、ゲームに得点を定義する。

本研究ではこれを二人単貧民の「得点」とし、この得点のミニマックス値と、得点を最大化する戦略について検証を行う。結果として、これらをいずれも線形時間で求めるアルゴリズムを導出した。さらに得点のみならず、パス数や手数にも関連した様々な知見を得た。

本稿で得られた結果を習得した単貧民のプレイヤーは、手札が配布され強さ順に並べ替えた後、手札枚数に比例する思考時間を経て冒頭のように宣言できるだろう。

## 2. 二人単貧民の定義

### 2.1 単貧民のルール

それぞれの札（カード）には「強さ」として1以上の整数が割り当てられており、各プレイヤーの手札は1以上の整数からなる多重集合（集合と違い、同じ値の札を何枚持ってもよい）とする。この設定の下、以下のようにゲームを進める。

- 先手後手を決め、先手プレイヤー、後手プレイヤーの順に交代で、手札から場に一枚ずつ札を出していく。
- 場は最初、空である。本稿では、強さ0の札が置かれていると考える。
- 手番のプレイヤーは、手札の中から場の札の値よりも大きい値の札を一枚出すことができる。札の値を強さとも呼ぶ。出した札が次の場の札になり、手番はもう一人のプレイヤーに移る。
- 手番のプレイヤーは、手札を出さずに手番をもう一人のプレイヤーに譲ることができる（パスをする、という）。このとき場は空になる。
- 先に手札がなくなったプレイヤーを勝者とし、その時点でゲームを終了する。

ゲームを通して手番は交互に移るが、手番のプレイヤーを**手番プレイヤー**、もう一人のプレイヤーを**非手番プレイヤー**と呼ぶ。

以降では、手番プレイヤーの手札  $X$ 、非手番プレイヤーの手札  $\bar{X}$ 、場札の強さ  $r$  であるような局面は、局面  $s = (X, \bar{X}, r)$  として三つ組によって表記する。手は、パスなら0、札を出すなら札の強さの整数によって表現する。

### 2.2 単貧民における得点の定義

負け側の残り枚数を勝ち側は最大化、負け側は最小化する設定に適合するように、以下の得点を定義する。

**定義 1.** 二人単貧民において、終局時に相手の残り手札枚数から自分の残り手札枚数を引いた値を自分の**得点**とする。

## 3. 得点のミニマックス値

### 3.1 得点ミニマックス値と一般化した「勝敗」の関係

負け側に残る手札枚数のミニマックス値について考える。

例えば、相手手札が残り3枚の状態自分が最後の一枚を出して勝てるが、4枚以上にはできないとする。これはつまり、もし「相手が残りの2枚になれば負け」というルールで戦えば勝ちだが、「相手が残りの3枚になれば負け」というルールでは負けであることを意味している。

このように単貧民の勝敗を「残り何枚になれば勝ち」のように一般化して、その上での勝敗を考えれば残り枚数のミニマックス値を決定することができる。この問題は先行研究 [4] において議論した。以下、そちらで用いた定義を再利用する。

**定義 2.** 二人単貧民のある時点の手番プレイヤーを  $P$ 、非手番プレイヤーを  $\bar{P}$  とする。 $\bar{P}$  の手札枚数が  $c_1 + 1$  枚以上の状態で  $P$  の手札枚数が  $c_0$  枚以下になれば  $P$  の勝ち、 $P$  の手札枚数が  $c_1 + 1$  枚以上の状態で  $\bar{P}$  の手札枚数が  $c_1$  枚以下になれば  $\bar{P}$  の勝ちとする勝敗の条件を  $(c_0, c_1)$ -**勝利条件** と呼ぶ。さらに、 $(c_0, c_1)$ -勝利条件において勝敗について最適な戦略を  $(c_0, c_1)$ -**最適戦略** と呼ぶ。

手番側、非手番側の手札枚数がそれぞれ  $n_0, n_1$  のとき、勝利条件  $(c_0, c_1)$  において  $c_0$  と  $c_1$  の定義域は基本的には  $0 \leq c_0 < n_0$  かつ  $0 \leq c_1 < n_1$  を前提とする。ただし、後々の議論のため  $c_0 \geq 0, c_1 \geq 0, 0 \leq c_0 + c_1 < n_0 + n_1$  の範囲で勝敗を定義しておく。 $c_0 = n_0$  や  $c_1 = n_1$  の場合はゲームとしての意味はないが、それぞれ手番側必勝、非手番側必勝として定義しておくのは自然である。

この勝利条件の表記を用いて、負け側の残り枚数のミニマックス値を表現することが可能である。

**補題 1.** 二人単貧民における終局時について、手番プレイヤーの残り枚数のミニマックス値は

$$\min\{c | (c, 0)\text{-勝利条件で手番プレイヤー必勝}\}$$

であり、非手番プレイヤーの残り枚数のミニマックス値は

$$\min\{c | (0, c)\text{-勝利条件で非手番プレイヤー必勝}\}$$

である。

**証明.** 手番プレイヤーが  $(c, 0)$ -勝利条件で必勝かつ  $(c-1, 0)$ -勝利条件で必敗のとき、手番側は非手番側が勝利する前に  $c$  枚にすることはできるが、 $c$  枚未満にはできない。

一方で、非手番プレイヤーが  $(0, c)$ -勝利条件で必勝かつ  $(0, c-1)$ -勝利条件で必敗のとき、非手番側は  $c$  枚にすることはできるが、 $c$  枚未満にはできない。

逆に勝利する側については、 $(0, 0)$ -勝利条件で必勝であり、勝てば手札が残り0枚となるのでこちらも成立する。

以上により、これらの値は終局時の残り枚数のミニマックス値に等しい。 □

### 3.2 一般化した勝利条件の勝敗決定アルゴリズム

勝利条件を一般化した二人単貧民の必勝プレイヤーの判定は、両プレイヤーの手札がソート済みであれば手札総数  $N$  に対して時間計算量  $O(N)$  で行うことが可能である [4]。このアルゴリズムは本稿の議論の前提とするため、関数の定義も含め本節で紹介する。

非負整数の多重集合について考える。これは単貧民の札の集合と捉えてよい。非負整数の多重集合  $V_0, V_1$  を、各要素の値を持った頂点の集合と捉え、

$$E_0 = \{(i, j) | i \in V_0, j \in V_1, i > j\} \quad (1)$$

のように定義した  $E_0$  を辺集合とする二部グラフを考える。

$E_0$  は  $V_0$  の要素から、 $V_1$  のより小さい値の要素への辺の集合である。このような条件を満たす二部グラフ  $(V_0, V_1, E_0)$  の最大マッチングの組の数を  $\mu(V_0, V_1)$  と表記する。以降では最大マッチングの組の数を単にマッチング数と呼び、 $E_0$  の定義に従ったマッチングを  $V_0$  から  $V_1$  への下向きマッチングと呼ぶ。

$\mu(V_0, V_1)$  は双方の頂点集合の要素が小さい順または大きい順にソートされていれば、頂点の総数  $N$  に対して時間計算量  $O(N)$ 、空間計算量  $O(1)$  で計算可能である。なお、空間計算量においては元の多重集合自体の容量は含まないものとする。

また、非負整数の空でない多重集合  $V$  から、小さい方から重複込みで  $i$  番目 ( $1 \leq i \leq |V|$ ) の要素一つを除いた多重集合を  $V_{-i}$  とする。さらに、小さい方から  $j$  番目まで ( $j$  番目含む) を除いた多重集合を  $V_{-[j]}$  とする。これらの減算を複数組み合わせる場合は  $V_{-[j],i}$  のように表記する。

このとき次の命題 1 により一般化勝利条件における必勝プレイヤーを判定できる [4]。

**命題 1.** 二人単貧民の局面  $(X, \bar{X}, r)$ 、勝利条件  $(c_0, c_1)$  において

$$\mu(X_{-[c_0]}, \bar{X}_{-[c_1+1]} + \{r\}) > \mu(\bar{X}_{-[c_1]}, X_{-[c_0+1]}) \quad (2)$$

ならば手番プレイヤー必勝、そうでなければ非手番プレイヤー必勝である。

### 3.3 得点ミニマックス値の計算アルゴリズム

補題 1 と命題 1 から、残り枚数のミニマックス値を手札総数  $N$  に対して  $O(N^2)$  で計算できることは明らかであるが、実際には  $O(N)$  で計算する方法が存在することを本節で示す。

まず次のように関数  $\sigma$  を定義する。

**定義 3.**  $V_0, V_1$  を非負整数の多重集合、 $k$  を非負整数とす

る。3.2 節の式 1 で辺を定義した二部グラフにおいて、 $V_0$  から  $V_1$  への下向きマッチング辺を  $k$  本を最大として引けるだけ引く場合に、 $V_1$  中でマッチング辺がある最小の要素以下で、かつマッチング辺を持たない  $V_1$  内の要素数の最大値を  $\sigma(V_0, V_1, k)$  と定義する。

$\sigma(V_0, V_1, k)$  は図 1 のように、大きい値から貪欲に  $k$  本のマッチングを作成した際に下に残った  $V_1$  内の要素数として計算できる。そのため  $\sigma(V_0, V_1, k)$  は  $V_0, V_1$  が降順にソート済みであれば、要素の総数  $N$  に対して時間計算量  $O(N)$ 、空間計算量  $O(1)$  で計算可能である。

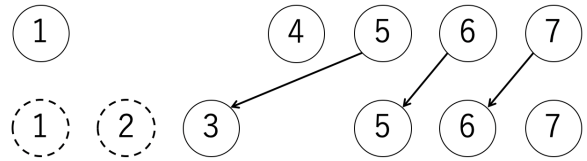


図 1 関数  $\sigma$  の計算例。  $\sigma(\{1, 4, 5, 6, 7\}, \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}, 3) = 2$ 。

命題 1 で用いた手札のマッチング数は、繰り返し利用するため特別な関数として定義しておく。

**定義 4.** 二人単貧民の局面  $s = (X, \bar{X}, r)$  と勝利条件  $(c_0, c_1)$  に対して、下向き最大マッチング数  $\mu_0(s, c_0, c_1), \mu_1(s, c_0, c_1)$  を

$$\mu_0(s, c_0, c_1) := \mu(X_{-[c_0]}, \bar{X}_{-[c_1+1]} + \{r\}), \quad (3)$$

$$\mu_1(s, c_0, c_1) := \mu(\bar{X}_{-[c_1]}, X_{-[c_0+1]}) \quad (4)$$

と定義する。ただし、勝利条件の  $c_0, c_1$  の引数は省略可能とし、省略した場合には

$$\mu_0(s) := \mu_0(s, 0, 0), \quad (5)$$

$$\mu_1(s) := \mu_1(s, 0, 0) \quad (6)$$

のように通常の勝利条件に対応する  $c_0 = c_1 = 0$  が入るものとする。

最後に、関数  $\sigma$  と  $\mu_0, \mu_1$  を用いて、以下の関数  $\sigma_0, \sigma_1$  を定義する。

**定義 5.** 二人単貧民の局面  $s = (X, \bar{X}, r)$  において  $X_{\geq r} = \{x | x \in X \wedge x \geq r\}$  とおき、関数  $\sigma_0, \sigma_1$  を

$$\sigma_0(s) := \sigma(\bar{X}, X, \mu_0(s)), \quad (7)$$

$$\sigma_1(s) := \begin{cases} \sigma(X - \min X_{\geq r}, \bar{X}, \mu_1(s)) & (\max X > r) \\ \sigma(X, \bar{X}, \mu_1(s) + 1) & (\max X \leq r) \end{cases} \quad (8)$$

と定義する。

このとき次の定理 1 が成り立ち、 $\mu$  と  $\sigma$  の計算量はいずれも手札総数に対して線形であるため、残り枚数のミニマックス値を線形時間で計算可能であると示すことができる。

**定理 1.** 二人単貧民の局面  $s$  において手番プレイヤーの残り手札枚数のミニマックス値は  $\sigma_0(s)$  であり、非手番プレイヤーの残り手札枚数のミニマックス値は  $\sigma_1(s)$  である。

**証明.** まず手番プレイヤーの残り手札枚数のミニマックス値について考える。

手番プレイヤー必勝、つまり  $\mu_0(s) > \mu_1(s)$  のとき  $\bar{X}$  から  $X$  へ下向きマッチングは  $\mu_1(s)$  本しか引けないか、 $X$  の最弱札に対して  $\mu_1(s) + 1$  本目を引けるかのどちらかである。  $\mu_0(s) \geq \mu_1(s) + 1$  より、 $\sigma$  の定義に従うと  $\sigma_0(s) = 0$  である。

一方で非手番プレイヤー必勝、つまり  $\mu_0(s) \leq \mu_1(s)$  のとき  $X$  の最弱札を除いても  $\bar{X}$  から  $X$  へ  $\mu_0(s)$  本の下向きマッチングが引けるので  $\sigma_0(s) > 0$  である。  $\mu_0(s) = 0$  のときは明らかなのでそれ以外のときについて考えると、 $\sigma_0$  の定義より、

$$\mu_0(s) = \mu(\bar{X}, X_{-[\sigma_0(s)]}) = \mu_1(s, \sigma_0(s) - 1, 0)$$

かつ

$$\mu_0(s) = \mu(\bar{X}, X_{-[\sigma_0(s)+1]}) + 1 = \mu_1(s, \sigma_0(s), 0) + 1$$

である。一方で、 $\bar{X}$  から  $X$  へマッチングが  $\mu_0(s)$  本引かれた後にまだ  $X$  の下から  $\sigma_0(s)$  枚の札が残っていることから、 $X$  の下から  $\sigma_0(s)$  枚または  $\sigma_0(s) - 1$  枚を除いても  $\bar{X}$  へ下向きマッチングの最大本数は減少せず、

$$\mu_0(s) = \mu_0(s, \sigma_0(s), 0) = \mu_0(s, \sigma_0(s) - 1, 0)$$

である。よって

$$\mu_0(s, \sigma_0(s) - 1, 0) \leq \mu_1(s, \sigma_0(s) - 1, 0)$$

かつ

$$\mu_0(s, \sigma_0(s), 0) > \mu_1(s, \sigma_0(s), 0)$$

を満たし、勝利条件と勝敗の関係の単調性により

$$\sigma_0(s) = \min\{c|(c, 0)\text{-勝利条件で手番プレイヤー必勝}\}$$

である。ゆえに補題 1 により手番側の残り手札枚数のミニマックス値は  $\sigma_0(s)$  である。

$\sigma_1$  に対しても  $\sigma_0$  と同様の議論を行えるが、 $\sigma_1(s)$  の定義には場合分けがあり、これは手番側から非手番側に  $\mu_1(s) + 1$  本の下向きマッチングを作る際に場札をうまく扱う必要があるためである。

$\sigma_1$  の定義は次のようにも書き換えられる。

「 $X$  から  $\bar{X} + \{r\}$  へ下向きマッチングを  $\mu_1(s) + 1$  本引く、ただし場札にマッチング辺を引ける場合には必ず場札を含める。このとき、 $\bar{X}$  内でマッチング辺がある最小の要素以下で、かつマッチング辺を持たない要素の数」

この定義の下で、 $\sigma_0$  の場合と同様に議論を展開できる。

非手番プレイヤー必勝、つまり  $\mu_0(s) \leq \mu_1(s)$  のとき  $X$  から  $\bar{X} + \{r\}$  へ下向きマッチングは  $\mu_0(s)$  本しか引けないか、 $\bar{X}$  の最弱札を含めたことで  $\mu_0(s) + 1$  本目を引けるかのどちらかである。  $\mu_0(s) + 1 \geq \mu_1(s) + 1$  より、上記の  $\sigma_1$  の定義に従うと  $\sigma_1(s) = 0$  である。

一方で手番プレイヤー必勝、つまり  $\mu_0(s) > \mu_1(s)$  のとき  $\bar{X}$  の最弱札を除いても  $X$  から  $\bar{X} + \{r\}$  へ  $\mu_1(s) + 1$  本の下向きマッチングが引けるので  $\sigma_1(s) > 0$  である。  $\mu_1(s) = 0$  のときは明らかなのでそれ以外のときについて考えると、上記の  $\sigma_1$  の定義より、

$$\mu_1(s) + 1 = \mu(X, \bar{X}_{-[\sigma_1(s)]} + \{r\}) = \mu_0(s, 0, \sigma_1(s) - 1)$$

かつ

$$\begin{aligned} \mu_1(s) + 1 &= \mu(X, \bar{X}_{-[\sigma_1(s)+1]} + \{r\}) + 1 \\ &= \mu_0(s, 0, \sigma_1(s)) + 1 \end{aligned}$$

である。一方で、 $X$  から  $\bar{X} + \{r\}$  へマッチングが  $\mu_1(s) + 1$  本引かれた後にまだ  $\bar{X}$  の下から  $\sigma_1(s)$  枚の札が残っていることから、 $\bar{X}$  の下から  $\sigma_1(s)$  または  $\sigma_1(s) - 1$  枚を除いても  $X$  へ下向きマッチングの最大本数は減少せず、

$$\mu_1(s) = \mu_1(s, 0, \sigma_1(s)) = \mu_1(s, 0, \sigma_1(s) - 1)$$

である。よって

$$\mu_0(s, 0, \sigma_1(s) - 1) > \mu_1(s, 0, \sigma_1(s) - 1)$$

かつ

$$\mu_0(s, 0, \sigma_1(s)) \leq \mu_1(s, 0, \sigma_1(s))$$

を満たし、勝利条件と勝敗の関係の単調性により

$$\sigma_1(s) = \min\{c|(0, c)\text{-勝利条件で非手番プレイヤー必勝}\}$$

であるため、補題 1 により手番側の残り手札枚数のミニマックス値は  $\sigma_1(s)$  枚である。  $\square$

定理 1 より、残り手札枚数のミニマックス値の計算量は定理 2 に従う。

**定理 2.** 両プレイヤーの手札が降順ソート済みとき、手札総数  $N$  に対して時間計算量  $\mathcal{O}(N)$  空間計算量  $\mathcal{O}(1)$  で二人単貧民の両プレイヤーの残り手札枚数のミニマックス値を計算可能である。

また、局面の得点のミニマックス値を関数  $S$  で表すと、この関数は系 1 に従う。

**系 1.** 二人単貧民の任意の局面  $s$  について

$$S(s) = \sigma_1(s) - \sigma_0(s) \tag{9}$$

が成り立つ。

つまり、二人単貧民は勝敗のみならず、負け側の残り枚数からなる得点のミニマックス値も手札の総数に対して線形時間で求められる。



## 4. 得点最大化戦略

### 4.1 得点最大化する手の必要十分条件

任意の局面で得点を最大化する手を出す戦略を**得点最大化戦略**と呼ぶことにする。得点のミニマックス値を勝利条件を一般化した二人単貧民の勝敗で表現できる（補題 1）のと同じく、得点最大化戦略も一般化勝利条件における最適戦略によって表現できる。

**定理 3.** 二人単貧民の局面  $s$  における得点最大化戦略は、手番側必勝のとき

$$(0, \sigma_1(s) - 1)\text{-最適戦略}$$

であり、非手番側必勝のとき

$$(\sigma_0(s), 0)\text{-最適戦略}$$

である。

**証明.** 定理 1 を前提とする。

手番側必勝の場合、相手に  $\sigma_1(s)$  枚残して勝つことは  $(0, \sigma_1(s) - 1)$ -勝利条件において勝利することに等しいので、 $(0, \sigma_1(s) - 1)$ -最適な手を出すことが得点最大化の必要十分条件である。

一方で手番側必敗の場合、 $(\sigma_0(s) - 1, 0)$ -勝利条件では必敗であるが、 $(\sigma_0(s), 0)$ -勝利条件では必勝であり、 $(\sigma_0(s), 0)$ -最適戦略を取って  $\sigma_0(s) + 1$  枚以上を残しての負けを防ぐことが得点最大化の必要十分条件である。□

先行研究 [4] により、一般化勝利条件の下で最適な手を手一つ挙げることで、さらには最適な提出札の範囲まで手札の総数に対して線形時間で計算できることが示されている。そのため、定理 3 から得点を最大化する手の計算量についての帰結を得る。

**定理 4.** 両プレイヤーの手札が昇降順ソート済みのとき、手札総数  $N$  に対して時間計算量  $\mathcal{O}(N)$  空間計算量  $\mathcal{O}(1)$  で二人単貧民の残り枚数による得点を最大化する手の必要十分な範囲を計算可能である。

### 4.2 得点最大化戦略の例

本節では戦略の一例としてアルゴリズム 1 を紹介し、この戦略が得点最大化戦略の一つであることを示していく。

---

#### アルゴリズム 1 上から $\min(\mu_0, \mu_1 + 1)$ 番目戦略

---

局面  $s$  において、手番側の手札の上から  $\min(\mu_0(s), \mu_1(s) + 1)$  番目の札と出せる最小札の大きい方を出す。出せる札がなければパスをする。

---

**定理 5.** アルゴリズム 1 は二人単貧民の得点最大化戦略である。

**証明.**  $\mu_0(s)$  と  $\mu_1(s) + 1$  の大小の境界は勝敗の境界でもあることを利用し、手番側必勝局面と必敗局面で場合分けして考える。

手番プレイヤー必勝のとき  $\min(\mu_0(s), \mu_1(s) + 1) = \mu_1(s) + 1$ 。先行研究 [4]\*<sup>1</sup>より、 $(c_0, c_1)$ -勝利条件において手札の上から  $\mu_1(s, c_0, 0) + 1$  番目の札は最適な手である。

定理 3 より、手番プレイヤー必勝のとき  $(0, \sigma_1(s) - 1)$ -勝利条件における最適戦略が得点最大化戦略であるため、上から  $\mu_1(s, 0, 0) + 1$  番目、つまり  $\mu_1(s) + 1$  番目の手は得点を最大化する。

非手番プレイヤー必勝のときも同様である。先行研究 [4]\*<sup>2</sup>より  $(c_0, c_1)$ -勝利条件において手札の上から  $\mu_0(s, 0, c_1)$  番目の札は最適な手であり、定理 3 より  $(\sigma_0(s), 0)$ -勝利条件における最適戦略が得点最大化戦略であるから、上から  $\mu_0(s)$  番目の手は得点を最大化する。□

先行研究 [6] により、勝敗の意味で最適な手は  $\mu_0$  または  $\mu_1$  のどちらかを知ることによって選択できる\*<sup>3</sup>ことが知られているが、得点を最大化する手はアルゴリズム 1 により  $\mu_0, \mu_1$  の値の両方を知れば十分であるという結果が得られた。

### 4.3 得点最大化戦略の性質

アルゴリズム 1 ではマッチング数の差が大きい場合には強めの札が選ばれうる。必敗の側が一枚でも多く出すために強い札を出すべき局面は容易に作れる\*<sup>4</sup>が、一方で必勝の側は弱い札をいつかは出さなければならず、強い札を先に出す必要が果たしてあるだろうか。

この疑問に答えるのが次の定理 6 である。

**定理 6.** 二人単貧民の任意の手番側必勝局面において、出せる札があれば、出せる最小札か弱い方から二番目の札のどちらかは得点を最大化する提出札である。

**証明.** 先行研究 [4]\*<sup>5</sup>より、 $(c_0, c_1)$ -勝利条件において出せる札がある局面では、出せる最小札か弱い方から  $c_0 + 2$  番目の札のどちらかは最適な提出札であることが示されている。定理 3 より、手番プレイヤー必勝のとき  $(0, \sigma_1(s) - 1)$ -勝利条件における最適戦略が得点最大化戦略であるから、直ちに定理 6 を得る。□

**系 2.** 二人単貧民の任意の局面  $s$  において、出せる札があれば、出せる最小札か弱い方から  $\sigma_0(s) + 2$  番目の札のどちらかは得点を最大化する提出札である。

また、定理 3 より、以下の一般化勝利条件における最適戦略の性質は得点最大化の枠組みにも引き継がれる。

**系 3.** 二人単貧民において、出せる札があるときにパスの

\*<sup>1</sup> 文献 [4] のアルゴリズム 7 参照。

\*<sup>2</sup> 文献 [4] のアルゴリズム 6 参照。

\*<sup>3</sup> 手札の上から  $\mu_0$  番目、 $\mu_1$  番目はいずれも最適な手である。

\*<sup>4</sup> 局面  $(\{1, 2, 3\}, \{3\}, 0)$  などが挙げられる。

\*<sup>5</sup> 文献 [4] の系 5 参照。

みが得点を最大化する局面は存在しない。

**系 4.** 得点最大化を目指して戦う二人単貧民において、ツークツワンク（互いのプレイヤーがパスをし続けるべき局面）は存在しない。

一方で、出せる札があるがパスでも得点最大化可能な局面は存在している\*6。ただし場が空であればそのような状況は起こりえない\*7。定理 7 がその根拠である。

**定理 7.** 二人単貧民ですべての自手札を場に出すことが可能な局面において、パスは得点を最大化する手ではない。

**証明.** 局面  $s = (X, \bar{X}, r)$  においてすべての自手札を場に出せる  $\min X > r$  のときについて考える。

まずパスにより手番側必勝から必敗に変わる場合、パスは明らかに得点を最大化しない。

次に  $s$  が手番側必勝かつパスが必勝の手のうちの一つの場合、「現局面」と「パスをして相手が  $\bar{X}$  内の最弱札を出した局面」の得点を比較すると、

$$\sigma_1((X, \bar{X}, r)) > \sigma_1((X, \bar{X}_{-1}, r)) \geq \sigma_1((X, \bar{X}_{-1}, \min \bar{X}))$$

のように手番側の得点が少なくとも 1 減少している\*8。よってパスは得点を最大化する手ではない。

最後に、 $s$  が手番側必敗局面の場合、「パスをした局面」と「 $X$  内の最弱札を出した局面」の得点を比較すると、

$$\begin{aligned} -\sigma_1((\bar{X}, X, 0)) &\leq -\sigma_1((\bar{X}, X, \min X)) \\ &< -\sigma_1((\bar{X}, X_{-1}, \min X)) \end{aligned}$$

のように最小札を出す手と比較して手番側の得点が少なくとも 1 小さく、パスは得点を最大化する手ではない。□

#### 4.4 提出札と得点の関係の凸性

勝敗の意味で最適な提出札の必要十分な範囲は、一箇所にまとまっていて切れ目がない、言い換えれば所持札の強さに対して最適性は凸性がある [4]。得点に関しても同じように、提出札の強さに対して上に凸である性質を持っている\*9。

**系 5.** 二人単貧民の提出札の強さに対する得点のミニマックス値は上に凸の関係がある。

**証明.** 手番側必勝のときを考える。任意の手札  $X$  内の札  $x, x' \in X$  について、いずれの札を提出しても非手番側に

\*6 手番側必勝局面なら  $(\{1, 2, 4\}, \{1, 1, 3\}, 2)$ 、必敗局面なら  $(\{1, 1, 3\}, \{1, 2\}, 1)$  などがある。

\*7 大富豪において空の場でのパスは特殊な状況でない限り選ばれにくい [7] が、この結果は一つの根拠といえるかもしれない。ただし、複数枚出しルールを追加するとこの性質が成り立たなくなることは注意が必要である。

\*8 次の性質を利用している。

任意の局面  $s = (X, \bar{X}, r)$  において、 $\sigma_1(s) > 0$  かつ  $\bar{x} < \min \bar{X}$  ならば  $\sigma_1(s) < \sigma_1((X, \bar{X} + \{\bar{x}\}, r))$  である。

\*9 ただし一方で、任意の局面において手を選んだ後の得点のミニマックス値は 3 種類しかないという性質もある。

$c$  枚の札を残すことができるとすると、このとき勝利条件  $(0, c-1)$  で手番側必勝である。

一方で、 $(0, c-1)$ -最適な提出札は切れ目のない区間である。ゆえに  $x$  と  $x'$  の間の強さの任意の提出札について、少なくとも  $c$  枚の札を相手に残して勝つことが可能である。

非手番側必勝のときも同様の議論により示すことができる。□

## 5. 得点最大化とパス数との関係

前節までは負け側の残り枚数を指標として戦略を検討したが、単貧民における評価指標として考えるものは他にもある。本節では、「できる限りパスをせずに勝ちたい」「できる限り相手にパスをさせて勝ちたい」という指標について考え、得点最大化との関連を議論する。

ここで、パス数は二人のプレイヤーそれぞれで数えられるので、どちらのプレイヤーのパス数に着目するかにより二つ零和な指標とそれを競う戦略が考えられる。

**定理 8.** 二人単貧民の任意の局面において、「自分のパス数を自分は小さく、相手は大きくする」戦略と「相手のパス数を相手は小さく、自分は大きくする」戦略には常に共通の手があり、この共通部分の戦略は得点最大化戦略と一致する\*10。

このときの、各プレイヤーのパス数も手札の総数に対して線形時間で計算できる。

**定理 9.** 二人単貧民の局面  $s = (X, \bar{X}, r)$  の手番プレイヤーのパス数のミニマックス値は

$$|\bar{X}| - \sigma_1(s) - \min(\mu_0(s), \mu_1(s)) \quad (10)$$

であり、非手番プレイヤーのパス数のミニマックス値は

$$|X| - \sigma_0(s) - \min(\mu_0(s), \mu_1(s) + 1) \quad (11)$$

である。

定理 8、定理 9 は直感的には次のように理解できる。

例えば局面  $s = (X, \bar{X}, r)$  が非手番側必勝のとき、手番側は強い方から  $|X| - \sigma_0(s)$  枚の札を出せるが、このうち非手番側は  $\mu(\bar{X}, X_{-[\sigma_0(s)]})$  枚には返すことができる。  $\sigma_0(s)$  の定義よりこの値は  $\mu_0(s)$  と等しいため、非手番側は少なくとも  $|X| - \sigma_0(s) - \mu_0(s)$  回のパスが必要である。これ以上の回数パスをさせるには手番側がより多くの札を出す必要があるが、それは不可能である。

証明のために以下の定義を行う。

**定義 6.** 二人単貧民の局面  $s = (X, \bar{X}, r)$  に対して、

\*10 この命題における「自分のパス数を最小化する戦略」「相手のパス数を最大化する戦略」は、必勝局面で必敗の手を選ぶことを許容している。そして、そのような手のみがこれらの戦略に該当するような局面が存在しないことも、この命題は主張している。

$$\rho_0(s) := |\bar{X}| - \sigma_1(s) - \min(\mu_0(s), \mu_1(s)), \quad (12)$$

$$\rho_1(s) := |X| - \sigma_0(s) - \min(\mu_0(s), \mu_1(s) + 1) \quad (13)$$

を定義し、局面  $s = (X, \bar{X}, r)$  と手  $a$  に対して  $\rho_0, \rho_1$  に対応する

$$\rho'_0(s, a) := \begin{cases} 0 & (a > 0 \wedge |X| = 1) \\ \rho_1(\text{next}(s, 0)) + 1 & (a = 0) \\ \rho_1(\text{next}(s, a)) & (\text{otherwise}) \end{cases}, \quad (14)$$

$$\rho'_1(s, a) := \begin{cases} 0 & (a > 0 \wedge |X| = 1) \\ \rho_0(\text{next}(s, a)) & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (15)$$

を定義する。

さらに、局面  $s$  の手番プレイヤー  $P$  が手  $a$  を着手後の  $P$  の得点のミニマックス値を  $S'(s, a)$  で表すと、次の補題 2 が成り立つ。

**補題 2.** 二人単貧民の任意の局面  $s$  と  $s$  で合法的な任意の手  $a$  に対して、 $\rho'_1(s, a) - \rho_1(s) \leq 0$  かつ  $\rho'_0(s, a) - \rho_0(s) \geq 0$  かつ

$$\rho'_1(s, a) - \rho_1(s) - (\rho'_0(s, a) - \rho_0(s)) = \dot{S}(s, a) - S(s) + d \quad (16)$$

が成り立つ。ただし  $d$  は  $a$  が  $s$  において勝敗の意味で最適なら 0、そうでなければ 1 を取る値とする。

補題 2 は定義 6 から現局面が必勝か否か、着手後の局面が必勝か否か、手がパスか否かによって場合分けして整理し、最大マッチングの性質を考慮することで得られる。詳細な証明は省略する。

補題 2 から次のような流れで定理 8 と定理 9 を示すことができる。

**証明.** 手札枚数の合計に対する帰納法で証明する。

双方の手札枚数が一枚ずつのとき、得点最大化戦略により自分のパス数を最小化、相手のパス数を最大化できることは明らかであり、手番側必勝ならば  $\rho_0(s) = \rho_1(s) = 0$ 、必敗ならば  $\rho_0(s) = 1, \rho_1(s) = 0$  であるので  $\rho_0, \rho_1$  はパス数のミニマックス値として適切である。

双方の手札枚数の合計が  $k$  ( $\geq 2$ ) 枚のとき、任意の局面において  $\rho_0, \rho_1$  はパス数のミニマックス値であると仮定する。

手札枚数の合計が  $k + 1$  枚のとき、一手で上がる場合には先程と同様に明らかであるため、それ以外の場合について考える。

もし選んだ手によって必勝から必敗になる場合は得点は少なくとも 2 小さくなる。それゆえに、補題 2 より必勝局面と必敗局面のいずれにおいても  $\rho'_1 - \rho_1 - (\rho'_0 - \rho_0)$  を最大化する手は得点最大化の手である。

逆に得点最大化の手を選べば  $\rho'_1 - \rho_1 = \rho'_0 - \rho_0 = 0$  で

あり、 $\rho'_1$  を最大化、 $\rho'_0$  を最小化することも補題 2 の二つの不等式より明らかである。

場に出せる札がある場合、系 3 より札を出す手の中に得点を最大化する手があるため、その手を選ぶことで仮定よりパス数を  $\rho_0, \rho_1$  にできる。

パスをした場合、相手にパスを返されることで、同じ局面に戻り自分のパス数が 1 増える。よって、パスが自分のパス数のミニマックス値を達成することはない。さらに、次の空場で相手が得点を最大化する札を出す手を選べば、 $\rho_1$  が大きくなることはないので仮定より相手のパス数を増やせることもない。

よって場に出せる札がある場合、パス数のミニマックス値は  $\rho_0$  と  $\rho_1$  である。場に出せる札がない場合は唯一の合法手であるパスが得点を最大化するため、こちらも同様の結果を得る。

以上の帰納法により定理 9 を得て、同時に定理 8 も成立する。□

## 6. ゲーム終了までの手数

5 節で得たパスの回数についての結果を利用し、ゲームの終了までの手数について考える。

ゲーム内で勝ち側に手番が回る回数は、「手札を出す枚数」「勝ち側のパスの回数」の和で表される。そのため以下の補題 3 は明らかである。さらに、定理 9 を利用して定理 10 を得る。

**補題 3.** 二人単貧民のゲーム終了までの手数を勝ち側は最小化、負け側は最大化する戦略は、勝敗の意味で最適かつ勝ち側のパス数を勝ち側は最小化、負け側は最大化する戦略に等しい。

**定理 10.** 二人単貧民の局面  $s = (X, \bar{X}, r)$  において、ゲーム終了までの手数を勝ち側は最小化、負け側は最大化した場合に勝ち側に手番が回る回数のミニマックス値は、

$$|X| + |\bar{X}| - (\sigma_0(s) + \sigma_1(s)) - \min(\mu_0(s), \mu_1(s)) \quad (17)$$

である。

このような「負け側が延命しようとする戦略」は、詰将棋などで見られるようにゲームでは幅広く扱われてきたテーマである。定理 8 と補題 3 より、得点最大化戦略はこのような意味においてもすぐれた戦略であることが分かる。

## 7. 一般化勝利条件における得点最大化

前節まで、通常の勝利条件における残り枚数やパス数について議論を行った。

本節では、二人単貧民の得点を一般化勝利条件にも拡張し、ここまでの議論を一般化勝利条件の下で行うことで、手番側や非手番側がある枚数に到達した際の残り手札枚数の差やパス回数、手数に対して結果を拡張する。それぞれ

の証明はこれまでの議論をなぞることで行えるため省略する。

一般化勝利条件における  $\sigma_0$  と  $\sigma_1$  は、局面  $s = (X, \bar{X}, r)$  に対して

$$\sigma_0(s, c_0, c_1) := \max(c_0, \sigma(\bar{X}, X, \mu_0(s, c_0, c_1))), \quad (18)$$

$$\sigma_1(s, c_0, c_1) := \begin{cases} \max(c_1, \sigma(X - \min X_{\geq r}, \bar{X}, \mu_1(s, c_0, c_1))) \\ (\max X > r) \\ \max(c_1, \sigma(X, \bar{X}, \mu_1(s, c_0, c_1) + 1)) \\ (\max X \leq r) \end{cases} \quad (19)$$

のように再定義する<sup>\*11</sup>。

**系 6.** 二人単貧民の局面  $s$ 、勝利条件  $(c_0, c_1)$  における手番側プレイヤーの残り手札枚数のミニマックス値は  $\sigma_0(s, c_0, c_1)$  であり、非手番側プレイヤーの手札枚数のミニマックス値は  $\sigma_1(s, c_0, c_1)$  である。

**系 7.** 二人単貧民の局面  $s$  における手番側プレイヤーの手札が残り  $c_0$  枚の時点での非手番側プレイヤーの手札枚数を最大化する戦略は

$$(c_0, \sigma_1(s, c_0, 0) - 1)\text{-最適戦略}$$

であり、非手番側プレイヤーの手札が残り  $c_1$  枚の時点での手番側プレイヤーの手札枚数を最小化する戦略は

$$(\sigma_0(s, 0, c_1), c_1)\text{-最適戦略}$$

である。

**系 8.** 二人単貧民の任意の局面  $s$  と勝利条件  $(c_0, c_1)$  において、手番側の手札の上から  $\min(\mu_0(s, c_0, c_1), \mu_1(s, c_0, c_1) + 1)$  番目の札と出せる最小札の大きい方を出すか、出せる札がなければパスをする戦略は勝利条件  $(c_0, c_1)$  における得点最大化戦略の一つである。

一般化勝利条件における得点最大化戦略は通常の勝敗での得点最大化戦略に比べて、 $c_0$  や  $c_1$  が残して勝てる枚数の最大値より小さい場合には緩めの、つまり得点を最大化する手を必ず含む戦略となっている。

**系 9.** 二人単貧民の任意の勝利条件  $(c_0, c_1)$  と、この勝利条件における任意の手番側必勝局面において、出せる札があれば、出せる最小札か弱い方から  $c_0 + 2$  番目の札のどちらかは勝利条件  $(c_0, c_1)$  における得点を最大化する提出札である。

**系 10.** 二人単貧民の任意の局面  $s$  と勝利条件  $(c_0, c_1)$  において、出せる札があれば、出せる最小札か弱い方から  $\sigma_0(s, c_0, c_1) + 2$  番目の札のどちらかは勝利条件  $(c_0, c_1)$  に

<sup>\*11</sup>  $\mu_0, \mu_1$  の定義と同じように、手札の下の方を無視するやり方で定義することも可能である。

おける得点を最大化する提出札である。

**系 11.** 二人単貧民の局面  $s = (X, \bar{X}, r)$ 、勝利条件  $(c_0, c_1)$  での手番プレイヤーのパス数のミニマックス値は、

$$|\bar{X}| - \sigma_1(s, c_0, c_1) - \min(\mu_0(s, c_0, c_1), \mu_1(s, c_0, c_1)) \quad (20)$$

であり、非手番プレイヤーのパス数のミニマックス値は、

$$|X| - \sigma_0(s, c_0, c_1) - \min(\mu_0(s, c_0, c_1), \mu_1(s, c_0, c_1) + 1) \quad (21)$$

である。

**系 12.** 二人単貧民の局面  $s = (X, \bar{X}, r)$ 、勝利条件  $(c_0, c_1)$  において、ゲーム終了までの手数を勝ち側は最小化、負け側は最大化した場合に勝ち側に手番が回る回数のミニマックス値は、

$$|X| + |\bar{X}| - (\sigma_0(s, c_0, c_1) + \sigma_1(s, c_0, c_1)) - \min(\mu_0(s, c_0, c_1), \mu_1(s, c_0, c_1)) \quad (22)$$

である。

## 8. おわりに

本研究では二人単貧民において、勝敗のみならず残り手札枚数やパス数、手数を競う設定における性質を検証した。

結果として、各指標のミニマックス値とそれを達成する最適戦略はすべて手札枚数に対して線形時間で計算できることを示した。二人単貧民の計算量の研究において、勝敗以外の指標に対する具体的なアルゴリズムを導出したのは本研究が初である。

勝敗判定が手札枚数に対して線形時間で行えることが知られている 8 切りありの単貧民 [5] においても同様の結果が得られることが予想されるが、より一般的にどのようなルールの集合においてこの性質が成り立つのかは興味深いテーマである。

## 参考文献

- [1] 西野順二: 単貧民における多人数完全情報展開型ゲームの考察, ゲームプログラミングワークショップ 2007 論文集, pp. 66-73 (2007).
- [2] 木谷裕紀, 小野廣隆: 二人単貧民の必勝判定問題, 火の国情報シンポジウム 2017 論文集, B5-4 (2017).
- [3] 木谷裕紀, 小野廣隆: 二人単貧民の必勝判定アルゴリズムとその拡張について, 火の国情報シンポジウム 2018 論文集, A3-4 (2018).
- [4] 大渡勝己, 木谷裕紀: 二人単貧民の消費枚数に関する勝利条件の一般化とその解析, ゲームプログラミングワークショップ 2020 発表予定 (2020).
- [5] 木谷裕紀, 大渡勝己, 小野廣隆: 8 切りルールを含む二人単貧民の必勝判定問題, 情報処理学会研究報告, 2018-GI-40, No. 3, pp. 1-5 (2018).
- [6] 木谷裕紀, 大渡勝己, 小野廣隆: 不完全情報二人単貧民分析のためのオラクルモデル, ゲームプログラミングワークショップ 2019 論文集, pp. 258-265 (2019).
- [7] 大渡勝己, 田中哲朗: 大貧民の空場におけるパスの有効性の検証, 情報処理学会研究報告, 2017-GI-37, No. 11, pp. 1-8 (2017).