二人単貧民の消費枚数に関する勝利条件の一般化とその解析

大渡 勝己[,a)]　木谷 裕紀[1,b)]

概要：二人単貧民はトランプゲームの大富豪（大貧民）を簡略化した二人零和確定完全情報ゲームである．通常，単貧民は手札をすべて出し切ったプレイヤの勝ちである．それに対して本研究では勝利条件を一般化し，予め定めた枚数の手札を出した方が勝ち，言い換えると，それぞれ指定された残り手札枚数に先に到達した方が勝ち，というルールについて検証を行った．結果として，通常の単貧民の場合と同じく，必勝プレイヤの判定を手札の総数 N に対して $\mathcal{O}(N)$ 時間で計算でき，二人単貧民の性質の多くはこの一般化した勝利条件においても成り立つことを示した．さらに，このゲームにおける最適戦略についても，最適な提出札の必要十分な範囲を $\mathcal{O}(N)$ 時間で計算できることなどの複数の新しい知見を得た．

キーワード：大富豪，単貧民，ゲーム，最適戦略，アルゴリズム，計算量，グラフ理論

Two-player TANHINMIN with the winning conditions extented to discarded number of cards

Ohto Katsuki[,a)]　Kiya Hironori[1,b)]

Abstract: Two-player TANHINMIN is a two-player zero-sum perfect information game that is a simplified version of a card game called DAIFUGO or DAIHINMIN. In the original TANHINMIN game, the player who has discarded all his cards in his hand wins in this game. In this paper, we generalize the winning condition as that the player who first discards a predetermined number of cards wins. As a result, we show that the decision of the winning player can be computed in $\mathcal{O}(N)$ time when the total number of cards is N as in the usual case of this game, and that many of similar points between original TANHINMIN and this extension. Furthermore, we present several new insights into the optimal strategy in this game, such as the fact that the necessary and sufficient range of optimal discarded cards can be computed in $\mathcal{O}(N)$ time.

1. はじめに

大富豪（大貧民）は主に日本で広く遊ばれているトランプゲームである．ゲーム AI 研究の文脈では，多人数不完全情報ゲームとしての難しさに対していわゆる人工知能的な手法でアプローチがなされてきた [1][2][3]．

一方でこのゲームの基盤となる「手札を強さの順序に従って出していく」構造に着目し，一枚出しのみに簡略化した単貧民というゲームも提案され [4]，組合せゲーム理論の研究対象としても扱われている．

単貧民のうち二人で行う二人単貧民はミニマックス法により，勝敗と最適戦略を計算可能な最も基本的な対象である．過去の研究によって，二人単貧民の必勝プレイヤの判定と必勝となる戦略は，ゲーム木探索を用いずとも手札の二部グラフの性質から手札枚数に対して線形時間で計算できることが示されている [5][6]．さらに二人単貧民の亜種となるいくつかのゲームに対しても，同様の簡潔な性質を発見している [7][8]．

過去の研究では二人単貧民の最終的な勝敗のみに焦点が当てられており，先に札を減らしていく戦略を取ることで，勝てないまでも途中までリードすることが可能かといった点については議論されて来なかった．

本稿では，「それぞれのプレイヤに勝利条件となる残り手札枚数を指定しておき，先に到達した方が勝ち」のように勝利の条件を一般化した二人単貧民のルールを考え，この問題にアプローチする．通常の二人単貧民であれば負けの

[1] 名古屋大学大学院情報学研究科 数理情報学専攻
Department of athematical Informatics, Graduate School of Informatics, Nagoya University
[a)] katsuki.ohto@gmail.com
[b)] kiya.hironori@f.mbox.nagoya-u.ac.jp

局面であっても，指定された勝利条件次第では先に手札を減らしていくことで勝てる場合がある．また，勝利条件によって最適戦略が異なるトレードオフの関係も生まれる．

結果として，これまでに知られていた二人単貧民の必勝プレイヤの判定アルゴリズムを一般化した手順により，一般化した勝利条件における必勝プレイヤの判定が行えるという結果を得た．これは線形時間で解析可能な単貧民ゲームの「フラットな」性質を理解する上で有用な結果である．

2. 二人単貧民の定義

2.1 単貧民のルール

それぞれの札（カード）には「強さ」として 1 以上の整数が割り当てられており，各プレイヤの手札は 1 以上の整数からなる多重集合（集合と違い，同じ値の札を何枚持っていてもよい）とする．この設定の下，以下のようにゲームを進める．

- 先手後手を決め，先手プレイヤ，後手プレイヤの順に交代で，手札から場に一枚ずつ札を出していく．
- 場は最初，空である．本稿では，強さ 0 の札が置かれていると考える．
- 手番のプレイヤは，手札の中から場の札の値よりも大きい値の札を一枚出すことができる．札の値を強さとも呼ぶ．出した札が次の場の札になり，手番はもう一人のプレイヤに移る．
- 手番のプレイヤは，手札を出さずに手番をもう一人のプレイヤに譲ることができる（パスをする，という）．このとき場は空になる．
- （通常の単貧民では）先に手札がなくなったプレイヤを勝者とし，その時点でゲームを終了する．

本研究では特別に，勝敗を決める条件を以下のように変更した場合も考える．

- それぞれのプレイヤに勝利条件となる残り枚数を設定し（プレイヤごとに枚数が異なる場合も考慮する），設定された残り枚数に先に到達したプレイヤを勝者とし，その時点でゲームを終了する．

ゲームを通して手番は交互に移るが，手番のプレイヤを**手番プレイヤ**，もう一人のプレイヤを**非手番プレイヤ**と呼ぶ．

以降では，手番プレイヤの手札 X，非手番プレイヤの手札 $\bar{X}$，場札の強さ r である二人単貧民の局面を $(X, \bar{X}, r)$ として三つ組により表現する．そのうち手札は 1 以上の整数からなる多重集合として $\{1, 2, 2, 3, 3\}$ のように表現する[*1]．手は，パスなら 0，札を出すなら札の強さの整数によって表現する．

*1 ただし後々のアルゴリズムの計算中には，手札の多重集合に空の場の強さを表す 0 の要素を挿入する操作を行うことがある．

2.2 勝利条件を一般化した単貧民の定義

二人単貧民の勝利条件を手札の残り枚数に対して一般化することの定義を行う．

定義 1. 二人単貧民のある時点の手番プレイヤを P，非手番プレイヤを $\bar{P}$ とする．$\bar{P}$ の手札枚数が $c_1 + 1$ 枚以上の状態で P の手札枚数が c_0 枚以下になれば P の勝ち，P の手札枚数が $c_0 + 1$ 枚以上の状態で $\bar{P}$ の手札枚数が c_1 枚以下になれば $\bar{P}$ の勝ちとする勝敗の条件を (c_0, c_1)**-勝利条件**と呼ぶ．

本稿においては，勝利条件は (c_0, c_1) のように二つ組によって表し，局面 $s = (X, \bar{X}, r)$，勝利条件 (c_0, c_1) のとき，のような表記を行う．また，c_0 と c_1 の定義域は特別に断りがない限り $0 \le c_0 < |X|$ かつ $0 \le c_1 < |\bar{X}|$ を前提とする．

勝利条件により必勝となる戦略が異なる具体的な局面の例として，図 1 の局面を挙げた．図 1 では左側の手札の色と，右側の各勝利条件における必勝プレイヤが対応する．通常の勝利条件 $(0, 0)$ では 3 を出すことで必勝であるが，勝利条件 $(1, 1)$ では相手が一枚出す前に自分が二枚出す必要があるため 5 を出す手が唯一の必勝手である．

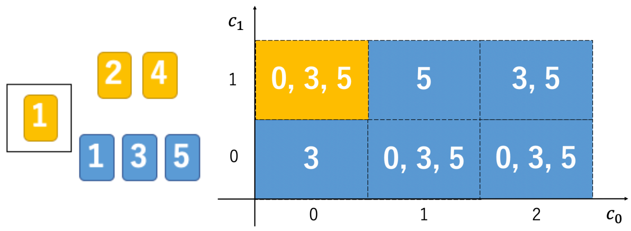

図 1 局面 $(\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, 1)$ の勝敗と最適な手

3. 二人単貧民の性質

3.1 手札のマッチング構造

非負整数の多重集合 V_0, V_1 を，各要素の値を持った頂点の集合と捉え，

$$E_0 = \{(i, j) | i \in V_0, j \in V_1, i > j\} \tag{1}$$

のように定義した E_0 を辺集合とする二部グラフを考える．

E_0 は V_0 の要素から，V_1 のより小さい値の要素への辺の集合である．このような条件を満たす二部グラフ (V_0, V_1, E_0) の最大マッチングの組の数を $\mu(V_0, V_1)$ と表記する．以降では最大マッチングの組の数を単にマッチング数と呼び，E_0 の定義に従ったマッチングを V_0 から V_1 への下向きマッチングと呼ぶ．

さらに V_0 から V_1 への下向き最大マッチングにおいて，V_0 内で辺のない頂点としてありうる最大の値を $\gamma(V_0, V_1)$ と定義する．辺のない頂点がなければ $-\infty$ とする．

図 2 に μ や γ の計算の例を挙げた．$\mu(V_0, V_1)$ は双方の頂点集合の要素が昇順または降順にソートされていれば，頂点の総数 N に対して時間計算量 $\mathcal{O}(N)$，空間計算量 $\mathcal{O}(1)$

で計算可能である．なお，空間計算量においては元の多重集合自体の容量は含まないものとする．

一方で，$\gamma(V_0, V_1)$ は小さい値から貪欲に下向きマッチングを作成した際にマッチング辺を持たない V_0 内の最大の値として計算できる．そのため，双方の頂点集合の要素が昇順にソートされていれば，頂点の総数 N に対して時間計算量 $\mathcal{O}(N)$，空間計算量 $\mathcal{O}(1)$ で計算可能である．

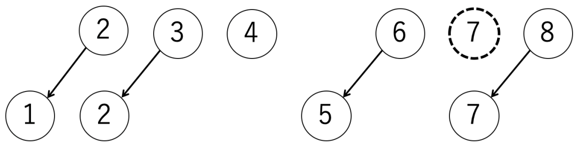

図 2　関数 μ，関数 γ の計算例．
$\mu(\{2,3,4,6,7,8\},\{1,2,5,7\}) = 4$,
$\gamma(\{2,3,4,6,7,8\},\{1,2,5,7\}) = 7$.

また，非負整数の空でない多重集合 V から，小さい方から重複込みで i 番目（$1 \leq i \leq |V|$）の要素一つを除いた多重集合を V_{-i} とする．さらに，小さい方から j 番目まで（j 番目含む）を除いた多重集合を $V_{-[j]}$ とする．これらの減算を複数組み合わせる場合は $V_{-[j],i}$ のように表記する．

さらに，非負整数の多重集合 V に対して，V の要素を小さい順に並べた際に小さい方から k 番目の値を v_k（$1 \leq k \leq |V|$）のように添え字付きの小文字で表記する．本稿では手札 X に対して x_k のように使う．

3.2　必勝プレイヤと最適戦略の計算量

先行研究 [6] により，任意の局面において以下の条件により $(0,0)$-勝利条件における必勝プレイヤを判定可能であることが示されている．

命題 1. 二人単貧民の局面 $(X, \bar{X}, r)$ において

$$\mu(X, \bar{X}_{-1} + \{r\}) - \mu(\bar{X}, X_{-1}) > 0 \tag{2}$$

ならば $(0,0)$-勝利条件において手番プレイヤ必勝，そうでなければ非手番プレイヤ必勝である．

手札から一枚除いたり，場札を加えた後の最大マッチング数を計算する上では，変化した手札を新たに保存する必要はなく，μ の計算内部に分岐を加えて元の手札から計算することが可能である．そのため式 2 の時間計算量，空間計算量はともに μ の計算量と同等である．

命題 2. 両プレイヤの手札がソート済みのとき，手札総数 N に対して時間計算量 $\mathcal{O}(N)$ 空間計算量 $\mathcal{O}(1)$ で二人単貧民の必勝プレイヤを計算可能である．

4.　一般化勝利条件における勝敗判定

勝利条件を一般化した単貧民においても，式 2 を変形した式により勝敗判定を行えることを示す．

結論としては，(c_0, c_1)-勝利条件では手番側の手札の下から c_0 枚，非手番側の手札の下から c_1 枚を無いものとして通常の単貧民を行うのと同じ結果になる．これは，強い札を持っていれば有利になりやすい単貧民の性質を考えれば直感的には納得の行く結果である．

まず準備として，手番側と非手番側のマッチング数を，勝利条件の一般化に合わせて再定義する．

定義 2. 二人単貧民の局面 $s = (X, \bar{X}, r)$ と勝利条件 (c_0, c_1) に対して, 下向き最大マッチング数 $\mu_0(s, c_0, c_1), \mu_1(s, c_0, c_1)$ を

$$\mu_0(s, c_0, c_1) := \mu(X_{-[c_0]}, \bar{X}_{-[c_1+1]} + \{r\}), \tag{3}$$

$$\mu_1(s, c_0, c_1) := \mu(\bar{X}_{-[c_1]}, X_{-[c_0+1]}) \tag{4}$$

と定義し，最大マッチング数の差 $\delta(s, c_0, c_1)$ を

$$\delta(s, c_0, c_1) := \mu_0(s, c_0, c_1) - \mu_1(s, c_0, c_1) \tag{5}$$

と定義する．

このとき，一般化した勝利条件における手番側プレイヤ必勝の必要十分条件は

$$\delta(s, c_0, c_1) > 0 \tag{6}$$

であると予想される．本節でこれを示す．

次に，手番側と非手番側マッチング数の変化を記述するための関数の定義を行う．簡略化のため，局面 s で合法な手全体の集合を $\mathrm{v}(s)$ と表記する*2．さらに，局面 s と手 a から着手後の（s における非手番プレイヤ視点の）局面を $\mathrm{next}(s, a)$ とする．

定義 3. 局面 $s = (X, \bar{X}, r)$，勝利条件 (c_0, c_1) において手 $a \in \mathrm{v}(s)$ を着手後に $\mu_0(s, c_0, c_1)$，$\mu_1(s, c_0, c_1)$ から変化した最大マッチング数を

$$\mu'_0(s, a, c_0, c_1) := \mu_1(\mathrm{next}(s, a, c_1, c_0)), \tag{7}$$

$$\mu'_1(s, a, c_0, c_1) := \begin{cases} 0 & (a > 0 \land |X| = c_0 + 1) \\ \mu_0(\mathrm{next}(s, a, c_1, c_0)) & (\textit{otherwise}) \end{cases} \tag{8}$$

と定義し，$\delta(s, c_0, c_1)$ から変化した着手後のマッチング数の差を

$$\delta'(s, a, c_0, c_1) := \mu'_0(s, a, c_0, c_1) - \mu'_1(s, a, c_0, c_1) + 1 \tag{9}$$

と定義する．

最後の一枚を出す場合の $\mu'_1(s, a, c_0, c_1)$ は，空の手札から最小札を除くことができないので特別に 0 と定義する．

また，式 9 中で $\delta'(s, a, c_0, c_1)$ に 1 を足したのは，δ が場札によって手番側にずれた指標のためである．手番側から見た差と非手番側から見た差を公平に比較し，長期

*2　$\mathrm{v}((X, \bar{X}, r)) = \{x | x \in X \land x > r\} \cup \{0\}$ である．

的なマッチング数の差の変化と対応させるために，本稿では非手番側の「ボーナス」を 1 を足した δ' を定義し[*3]，$\delta'(s,a,c_0,c_1)-\delta(s,c_0,c_1)$ をマッチング数の差の変化量として扱う．

この $\delta'-\delta$ は，

$$\begin{aligned}&\delta'(s,a,c_0,c_1)-\delta(s,c_0,c_1)=\\&\{\mu'_0(s,a,c_0,c_1)-\mu_0(s,c_0,c_1)\}-\\&\{\mu'_1(s,a,c_0,c_1)-\mu_1(s,c_0,c_1)\}+1\end{aligned} \tag{10}$$

のように手番側と非手番側それぞれの最大マッチング数の差に分解できる．

一方で $\mu'_0(s,a,c_0,c_1)$，$\mu'_1(s,a,c_0,c_1)$ を式展開すると

$$\mu'_0(s,a,c_0,c_1)=\begin{cases}\mu(X_{-[c_0]},\bar{X}_{-[c_1+1]})\\ \quad(a=0)\\ \mu(X_{-[c_0+1]},\bar{X}_{-[c_1+1]})\\ \quad(0<a\le x_{c_0+1})\\ \mu(X_{-[c_0]}-\{a\},\bar{X}_{-[c_1+1]})\\ \quad(a>x_{c_0+1})\end{cases}, \tag{11}$$

$$\mu'_1(s,a,c_0,c_1)=\begin{cases}\mu(\bar{X}_{-[c_1]},X_{-[c_0+1]}+\{0\})\\ \quad(a=0)\\ 0\\ \quad(a>0\wedge|X|=c_0+1)\\ \mu(\bar{X}_{-[c_1]},X_{-[c_0+2]}+\{a\})\\ \quad(0<a\le x_{c_0+1}\wedge|X|>c_0+1)\\ \mu(\bar{X}_{-[c_1]},X_{-[c_0+1]})\\ \quad(a>x_{c_0+1}\wedge|X|>c_0+1)\end{cases} \tag{12}$$

となる．

手番側, 非手番側のマッチング数の変化量 $\mu'_0-\mu_0$, $\mu'_1-\mu_1$ を最大マッチングの性質に従って整理した結果が表 1，表 2 である[*4]．

表 1 と表 2 は，二人単貧民の一般化勝利条件におけるすべての局面と手の組合せについてマッチング数の変化を記述している．ここからすべての局面におけるマッチング数の変化量について補題 1 が成り立つ．

補題 1. 二人単貧民の任意の局面 s，勝利条件 (c_0,c_1) と s でのすべての合法手 $a\in\mathrm{v}(s)$ において

$$-1\le\delta'(s,a,c_0,c_1)-\delta(s,c_0,c_1)\le 1 \tag{13}$$

[*3] 毎局面で手番側の μ から 0.5 引いて補正するやり方も考えられる．

[*4] 表 2 中のパスの場合に定義から導いた $\mu'_1-\mu_1$ の分岐条件は，$\mu(\bar{X}_{-[c_1]},X_{-[c_0+1]}+\{0\})$ と $\mu(\bar{X}_{-[c_1]},X_{-[c_0+1]})$ の大小比較である．これは $\bar{X}_{-[c_1]}$ 内のすべての札に下向き最大マッチングにおいて辺があるかどうかを調べることで達成できるため，表 2 中の条件式が得られる．

表 1 局面 $s=(X,\bar{X},r)$，勝利条件 (c_0,c_1) に対して X の下から i 番目の札を出す，またはパスした場合の手番側マッチング数の変化量

手	$\mu'_0-\mu_0$	条件
$i\le c_0+1$	-1	
$i>c_0+1$	-1	$\mu(X_{-[c_0],i},\bar{X}_{-[c_1+1]})=\mu_0-1$
	-2	$\mu(X_{-[c_0],i},\bar{X}_{-[c_1+1]})=\mu_0-2$
パス	0	$\mu(X_{-[c_0]},\bar{X}_{-[c_1+1]})=\mu_0$
	-1	$\mu(X_{-[c_0]},\bar{X}_{-[c_1+1]})=\mu_0-1$

表 2 局面 $s=(X,\bar{X},r)$，勝利条件 (c_0,c_1) に対して X の下から i 番目の札を出す，またはパスした場合の非手番側マッチング数の変化量

手	$\mu'_1-\mu_1$	条件
$i\le c_0+1$	0	$\mu(\bar{X}_{-[c_1]},X_{-[c_0+2]}+\{x_i\})=\mu_1$
	1	$\mu(\bar{X}_{-[c_1]},X_{-[c_0+2]}+\{x_i\})=\mu_1+1$
$i>c_0+1$	0	
パス	0	$\mu_1=\lvert\bar{X}\rvert-c_1$
	1	$\mu_1<\lvert\bar{X}\rvert-c_1$

を満たす．

この補題は，二人単貧民の一般化勝利条件において**いわゆる「大悪手」というものは存在せず，マッチング数の差は高々 1 しか変化しない**ことを表している．つまり，$\delta\le-1$ または $\delta\ge1$ のとき 6 式による勝敗の判定が逆転する手は無いということである．

次に，マッチング数の意味での「最善な」手において $\delta'-\delta$ が 0 でない条件を検証する．

補題 2. 二人単貧民の任意の局面 s，勝利条件 (c_0,c_1) において $\max_{a\in\mathrm{v}(s)}\delta'(s,a,c_0,c_1)-\delta(s,c_0,c_1)=1$ ならば $\delta(s,c_0,c_1)<0$ である．

証明. $\delta'-\delta=1$ となりうる手はパスのみである．このとき表 1 より $\mu(X_{-[c_0]},\bar{X}_{-[c_1+1]})=\mu_0(s,c_0,c_1)$ であるが，常に $\mu(X_{-[c_0]},\bar{X}_{-[c_1+1]})\le|\bar{X}_{-[c_1+1]}|<|\bar{X}_{-[c_1]}|$ でもあり

$$\mu_0(s,c_0,c_1)<|\bar{X}_{-[c_1]}|$$

が成り立つ．また表 2 より

$$\mu_1(s,c_0,c_1)=|\bar{X}_{-[c_1]}|$$

である．

以上より $\delta(s,c_0,c_1)<|\bar{X}_{-[c_1]}|-|\bar{X}_{-[c_1]}|=0.$ □

補題 3. 二人単貧民の任意の局面 $s=(X,\bar{X},r)$，勝利条件 (c_0,c_1) において $\max X>r$ のとき，$\max_{a\in\mathrm{v}(s)\wedge a>0}\delta'(s,a,c_0,c_1)-\delta(s,c_0,c_1)=-1$ ならば

$\delta(s, c_0, c_1) > 1$ である．

証明. $\max X > r$ より, 場に出せる札がある．$|X| = c_0+1$ のとき, 明らかに $\delta' - \delta = -1$ に該当しないので $|X| \geq c_0+2$ のときを考える．

場に出せる最小の札を出すとき手番側のマッチングは常に 1 しか減らない[*5]．一方で，非手番側のマッチング数が増えうるのは下から $c_0 + 1$ 番目までの札を出す場合のみである．ゆえに，場に出せる最小札は $c_0 + 1$ 番目までの札に限られ，$x_{c_0+1} > r$ が必要条件である．

このときマッチング数の変化の単調性により下から c_0+1 番目の札と下から $c_0 + 2$ 番目の札を出す手について考えれば十分である．

まず $c_0 + 1$ 番目の札について，表 2 より $\mu(\bar{X}_{-[c_1]}, X_{-[c_0],c_0+2}) = \mu(\bar{X}_{-[c_1]}, X_{-[c_0+1]}) + 1$ である．この式が成り立つのは，x_{c_0+1} より大きく x_{c_0+2} 以下の強さの札が $\bar{X}$ 内にあり，かつ最大マッチングにおいて $\bar{X}$ 内の x_{c_0+2} より強い札はすべて X 内の札への下向きマッチングに使われている場合である．

このとき $\bar{X}_{-[c_1]}$ から $X_{-[c_0+1]}$ への最大マッチングにおいて x_{c_0+2} へのマッチングが作れないから，x_{c_0+2} を除いた枚数がマッチング数のありうる最大値であり，

$$\mu_1(s, c_0, c_1) \leq |X_{-[c_0+1]}| - 1$$

が成り立つ．

一方で $c_0 + 2$ 番目の札については，表 1 より $\mu(X_{-[c_0],c_0+2}, \bar{X}_{-[c_1+1]}) = \mu(X_{-[c_0]}, \bar{X}_{-[c_1+1]} + \{r\}) - 2$. このとき，$x_{c_0+2}$ を抜いたことでマッチングが減っていることから，x_{c_0+1} 以上 x_{c_0+2} 未満の札が $\bar{X}$ 内にある．さらに，この札に対して x_{c_0+2} からの下向きマッチングが引かれた最大マッチングがあり，x_{c_0+1} や他の札が x_{c_0+2} の代わりにマッチングを作れない．よって，x_{c_0+1} から場札へのマッチングも含め，すべての札にマッチングがあるため

$$\mu_0(s, c_0, c_1) = |X_{-[c_0]}|$$

である．

ゆえに $\delta(s, c_0, c_1) \geq |X_{-[c_0]}| - (|X_{-[c_0+1]}| - 1) > 1$. □

補題 4. 二人単貧民の任意の局面 $s = (X, \bar{X}, r)$, 勝利条件 (c_0, c_1) において $\max X \leq r$ のとき, $\max_{a \in \mathrm{v}(s)} \delta'(s, a, c_0, c_1) - \delta(s, c_0, c_1) \geq 0$ である．

証明. パスしかできない局面である．このとき, $\bar{X}_{-[c_1+1]} + \{r\}$ と $\bar{X}_{-[c_1+1]}$ の違いは X の最大以上の札が一枚入るか否かだけであるので,

$$\mu_0(s, c_0, c_1) = \mu(X_{-[c_0]}, \bar{X}_{-[c_1+1]})$$

である．表 1 と表 2 より，このとき $\delta' - \delta \geq 0$ である． □

[*5] 最大マッチングの性質による．

補題 3，補題 4 より $\delta = 1$ の局面では $\delta' > 0$ を保つ手があり，逆に補題 2 より $\delta = 0$ の局面ではいかなる手によっても $\delta' > 0$ にはできない．最終的にすべての局面に対しての帰納法により次の定理 1 を得る．

定理 1. 二人単貧民の局面 s，勝利条件 (c_0, c_1) において

$$\delta(s, c_0, c_1) > 0 \tag{14}$$

ならば手番プレイヤ必勝，そうでなければ非手番プレイヤ必勝である．

証明. 主張を次の命題 (a) と (b) に分割する．

- (a) 任意の局面 s と勝利条件 (c_0, c_1) において，$\delta(s, c_0, c_1) > 0$ ならば (c_0, c_1)-勝利条件において手番プレイヤ必勝である．
- (b) 任意の局面 s と勝利条件 (c_0, c_1) において，$\delta(s, c_0, c_1) \leq 0$ ならば (c_0, c_1)-勝利条件において非手番プレイヤ必勝である．

任意の勝利条件とゲーム途中の局面について, 仮に勝利条件 (c_0, c_1), 局面 $(X, \bar{X}, r)$ とおいた際, $|X|+|\bar{X}| = c_0+c_1+n$ を満たす整数 $n(\geq 2)$ が存在し一意に決定される．この n に対する帰納法によって証明を行う．

(i). $n = 2$ ならば (a) と (b) が成立することを示す．

勝利条件 (c_0, c_1) として手札枚数が手番側 $c_0 + 1$ 枚，非手番側 $c_1 + 1$ 枚であり，双方のプレイヤが一枚でも出せば勝ちの条件である．

手番プレイヤが一手で勝てる場合，$\mu_0 = 1$ かつ $\mu_1 = 0$ である．そうでない場合は $\mu_0 = \mu_1 = 0$ であり，場に出せる札が無く手番プレイヤがパスをした後に非手番プレイヤが札を出して必勝である．

以上より $n = 2$ ならば (a) と (b) が成立する．

(ii). $n = k(\geq 2)$ なるすべての局面と勝利条件で (a) と (b) の成立を仮定し，それぞれ (a')，(b') とおく．

$|X| + |\bar{X}| = c_0 + c_1 + k + 1$ を満たす局面 $s = (X, \bar{X}, r)$, 勝利条件 (c_0, c_1) について考える．一手で勝てる場合は，$\mu_0 = 1$ かつ $\mu_1 = 0$ であるため (a) と (b) が成立する．それ以外の場合は以下のように場合分けを行う．

- (ii-1). $|X| + |\bar{X}| = c_0 + c_1 + k + 1 \wedge \max X > r$ のとき (a) の成立を示す．このとき必ず場に出すことができる札があり，一手で勝てないので $|X| \geq c_0 + 2$ である．このとき補題 3 より遷移後の局面で (b') が適用できるような札を出す手がある．
- (ii-2). $|X| + |\bar{X}| = c_0 + c_1 + k + 1$ のとき (b)，を示す．$|X| = c_0 + 1$ のとき，$\delta(s, c_0, c_1) < 0$ ならばパスだけが合法手である．札を出すとき，必ず $|X| \geq c_0 + 2$ のため一手で終了することはなく，補題 2 よりどの手を選んでも遷移した局面で (a') が適用できる．パスのとき，同じように (ii-1) が適用できる．
- (ii-3). $|X| + |\bar{X}| = k + 1 \wedge \max X \leq r$ のとき (a) の

成立を示す．この局面ではパスが唯一の合法手であるが，補題 4 よりパスによって遷移した後の局面で (ii-2) を適用できる．

(ii-1), (ii-2), (ii-3) より，$n = k (k \geq 2)$ を満たすすべての局面と勝利条件で (a) と (b) が成立するならば，$n = k + 1$ を満たす局面と勝利条件においても同じく成立する．

(i), (ii) より，任意の勝利条件と，その勝利条件におけるゲーム途中の任意の局面に対して (a) と (b) が成立し，定理 1 を得る． □

ここまでの証明により以下の性質も直ちに成立する．

定理 2. 両プレイヤの手札がソート済みのとき，手札総数 N に対して時間計算量 $\mathcal{O}(N)$，空間計算量 $\mathcal{O}(1)$ で二人単貧民の一般化勝利条件における必勝プレイヤを計算可能である．

系 1. 一般化勝利条件で戦う二人単貧民において，出せる札があるときにパスのみが最適である局面は存在しない．

系 2. 一般化勝利条件で戦う二人単貧民において，ツークツワンク（互いのプレイヤがパスをし続けるべき局面）は存在しない．

系 3. 勝利条件を (c_0, c_1) とする二人単貧民は，互いのプレイヤが最適戦略を取る前提の下で，手番側の手札の下から c_0 枚，非手番側の手札の下から c_1 枚を無視してゲームを行うのと勝敗の意味で同じであり，いずれのプレイヤも無視された札を出すことにより有利にはならない．

さらに，一つの勝利条件のみならず，すべての勝利条件における勝敗を「一度に」判定することも可能である．具体的には，一枚出したら勝ちの勝利条件から始め，勝っている方の無視された札を一枚ずつ追加してマッチング数を数えながら勝敗の境界線を辿り結果を記録する*6．結果として，手札総数に対して線形の記憶容量に保存した結果から，定数時間で任意の勝利条件に対する勝敗を取り出すことができる*7．

系 4. 二人単貧民の任意の局面において，すべての勝利条件における必勝プレイヤを $\mathcal{O}(1)$ 時間で判定するためのデータを，両プレイヤの手札がソート済みならば手札総数 N に対して時間計算量 $\mathcal{O}(N)$ で計算可能である．

5. 一般化勝利条件における最適戦略

本節からは (c_0, c_1)-勝利条件において最適であることを (c_0, c_1)-**最適**と呼び，(c_0, c_1)-最適な手の必要十分な範囲と (c_0, c_1)-最適な戦略の例について検証する．

*6 最大マッチングは手札の上から貪欲に構成できるため，弱い札を追加するごとにマッチングを一から再構成する必要はない．

*7 例えば，手番側のすべての勝利条件 c_0 に対して $\max\{c | (c_0, c)$-勝利条件で手番側必勝 $\}$ を記録しておき，任意の勝利条件 (c'_0, c'_1) に対して c'_0 で表引きして c'_1 と表中の値の大小を比較する．

5.1 最適な手の範囲

関数 μ や γ を利用して，一般化勝利条件における最適な手の必要十分な範囲を計算するアルゴリズム 1 を紹介する．

アルゴリズム 1 一般化勝利条件における最適な手の範囲

Input: 局面 $s = (X, \bar{X}, r)$，勝利条件 (c_0, c_1)
Output: (c_0, c_1)-最適な提出札の範囲 H
Output: パスが (c_0, c_1)-最適であるかどうかのブール値 b

1: $b \leftarrow false, H \leftarrow []$（空）に初期化
2: $\delta_0(s, c_0, c_1) \neq 1$ のとき，$H \leftarrow [\min X, \max X]$，$b \leftarrow true$ として 8 行目へ
3: $\mu_1(s, c_0, c_1) = \mu(\bar{X}_{-[c_1]}, X_{-[c_0+2]}) + 1$ または $|X| = c_0 + 1$ のとき，$H \leftarrow H \cup [\min X, x_{c_0+1}]$
4: 3 行目の条件を満たさないとき，$Y = \{\bar{x} | \bar{x} \in \bar{X}_{-[c_1]} \wedge \bar{x} \leq x_{c_0+2}\}$ とする．$\min X \leq \max Y \leq x_{c_0+1}$ のとき，$H \leftarrow H \cup [\max Y, x_{c_0+1}]$
5: $\mu_0(s, c_0, c_1) = \mu(X_{-[c_0]}, \bar{X}_{-[c_1+1]})$ のとき，$H \leftarrow H \cup [x_{c_0+2}, \max X]$
6: 5 行目の条件を満たさず $\gamma(X_{-[c_0]}, \bar{X}_{-[c_1+1]}) \geq x_{c_0+2}$ ならば，$H \leftarrow H \cup [x_{c_0+2}, \gamma(X_{-[c_0]}, \bar{X}_{-[c_1+1]})]$
7: $\mu_0(s, c_0, c_1) = \mu(X_{-[c_0]}, \bar{X}_{-[c_1+1]})$ のとき，$b \leftarrow true$
8: $H \cap [r + 1, \infty], b$ を返す

定理 3. アルゴリズム 1 によって二人単貧民の (c_0, c_1)-最適な手の必要十分な範囲を計算できる．

証明. 3，4 行目の下から $c_0 + 1$ 枚の札を出す手について考える．まず，$|X| = c_0 + 1$ のときは一枚出せば勝ちなのでどの札を出しても勝ちである．そうでないとき，手番側マッチング数は変化せず，非手番側マッチング数が増えない手が最適な手である．

x_k（$1 \leq k \leq c_0 + 1$）の提出により非手番マッチング数 $\mu_1(s, c_0, c_1)$ が増えない条件は二通りに分けられる．「x_{c_0+2} を使わない最大マッチングが存在しない場合」と「x_{c_0+2} を使わない最大マッチングが存在する，つまり $\bar{X}$ 内で x_{c_0+2} より強い札はすべてマッチング相手が足りており，x_{c_0+2} 以下の札で x_k より強い札が $\bar{X}$ 内に無い場合」である．

前者に対応するのが 3 行目の前半の条件であり，後者に対応するのが 4 行目の条件である．特に 4 行目については，Y が空集合である場合 $\mu_0 \leq \mu_1 \leq |\bar{X}| - c_1$ となり勝ち局面であることに矛盾するので，その判定は不要である．

5，6 行目の $c_0 + 2$ 枚目以降の札を出す手について考える．

$x_k > r$ を満たす任意の k（$c_0 + 2 \leq k \leq |X|$）について，$\delta'(s, x_k, c_0, c_1) - \delta(s, c_0, c_1) = 0$ を満たす必要十分条件は表 2 より，手番側のマッチング数が 1 しか減少しないことである*8．この条件が

*8 場札 r と札 x_k を抜くことで手番側マッチング数は少なくとも 1 小さくなるのだが，x_k が「強すぎる」場合さらに 1 減ってしまうことがあり，そうならない条件を検証する．

$$\mu_0(s,c_0,c_1) = \mu(X_{-[c_0]}, \bar{X}_{-[c_1+1]}) \\ \vee\ x \le \gamma(X_{-[c_0]}, \bar{X}_{-[c_1+1]})$$

と同値であることを示す．$\vee$ の左側の条件が 5 行目，右側の条件が 6 行目に対応している．

まず $\mu_0(s,c_0,c_1) = \mu(X_{-[c_0]}, \bar{X}_{-[c_1+1]})$ のとき，$X_{-[c_0],k}$ は $X_{-[c_0]}$ から一つの要素が抜けたのみであるので $\mu(X_{-[c_0],k}, \bar{X}_{-[c_1+1]}) \ge \mu_0(s,c_0,c_1) - 1$ が成り立つ．よってすべての x_k で手番側のマッチング数は 1 しか減少しない．

一方で $\mu_0(s,c_0,c_1) = \mu(X_{-[c_0]}, \bar{X}_{-[c_1+1]}) + 1$ のとき，すべての最大マッチングにおいて x_k のマッチング相手がいないか，「x_k のマッチング相手」のマッチング相手が x_k を除いて他にいる必要がある．$\gamma(X_{-[c_0]}, \bar{X}_{-[c_1+1]})$ より強いすべの札は，γ の定義より最大マッチングで余ることはない．一方で $\gamma(X_{-[c_0]}, \bar{X}_{-[c_1+1]})$ の強さの札は最大マッチングにおいて余らせることができるため，それ以下の札が抜けた場合にマッチングの相手としてこの札を使うことができる．ゆえに，$x \le \gamma(X_{-[c_0]}, \bar{X}_{-[c_1+1]})$ は手番側のマッチング数が 1 しか減少しないための必要十分条件である．

最後に 7 行目のパスについては，必勝局面では手番側マッチング数の変化のみ考慮すればよく，条件式を表 1 から適用した結果である．　□

定理 4. 両プレイヤの手札がソート済みのとき，手札総数 N に対して時間計算量 $\mathcal{O}(N)$，空間計算量 $\mathcal{O}(1)$ で二人単貧民の一般化勝利条件における最適な手の必要十分な範囲を計算可能である．

アルゴリズム 1 の手順から，パス以外の**最適な提出札の必要十分な範囲は切れ目がない一つまたは空の区間である**という結果も得られる．

5.2　最適戦略の例

最適戦略の例として以下のアルゴリズム 2 から 7 のような戦略が挙げられる．

なお，局面 $s = (X, \bar{X}, r)$，勝利条件 (c_0, c_1) を前提とし，**「場に出せる札がなければパスをする」はすべての戦略に共通するので省略**している．

アルゴリズム 2 下から $c_0 + 1$ 番目札優先戦略

$|X| = c_0 + 1$ または $\mu(\bar{X}_{[c_1]}, X_{-[c_0],c_0+2}) = \mu_1(s,c_0,c_1)$ のとき手札 X 内の下から c_0 枚，そうでないとき下から c_0+1 枚を除いた中で出せる最小の札を出す．

アルゴリズム 3 下から $c_0 + 2$ 番目札優先戦略

$|X| \ge c_0+2$ かつ $\mu(X_{-[c_0],c_0+2}, \bar{X}_{-[c_1+1]}) = \mu_0(s,c_0,c_1)-1$ のとき手札 X 内の下から $c_0 + 1$ 枚，そうでないとき下から c 枚（$0 \le c \le c_0$）を除いた中で出せる最小の札を出す．

アルゴリズム 4 μ_0 で切り替え戦略

$\mu_0(s,c,c_1) \ge |X| - c_0$ のとき（$0 \le c \le c_0$）手札 X 内で出せる最小の札，そうでないとき下から $c_0 + 1$ 枚を除いた中で出せる最小の札を出す．

アルゴリズム 5 μ_1 で切り替え戦略

$\mu_1(s,c_0,c) = |X| - c_0 - 1$ のとき（$0 \le c \le c_1$）手札 X 内で出せる最小の札，そうでないとき下から $c_0 + 1$ 枚を除いた中で出せる最小の札を出す．

アルゴリズム 6 上から μ_0 番目戦略

X の上から $\mu_0(s,c,c_1)$ 番目の札（$0 \le c \le c_0$）と出せる最小札の大きい方を出す．

アルゴリズム 7 上から $\mu_1 + 1$ 番目戦略

X の上から $\mu_1(s,c_0,c) + 1$ 番目の札（$0 \le c \le c_1$）と出せる最小札の大きい方を出す．

定理 5. アルゴリズム 2 からアルゴリズム 7 まではすべて二人単貧民の一般化勝利条件における最適戦略である．

証明. 定理 3 より $\delta(s,c_0,c_1) \ne 1$ のときすべての手が最適であるので，$\delta(s,c_0,c_1) = 1$ の場合に絞って考える．系 1 より，出せる札があれば必ずパス以外の最適な手がある．

アルゴリズム 2 は表 1，表 2 の結果から，δ' が悪くならない手を選ぶ戦略であり最適である．

アルゴリズム 3 において，分岐の条件を満たす場合は表 1，表 2 より最適である．満たさないとき，$|X| = c_0+1$ の場合は最後の一枚で明らかに最適であり，$\mu(X_{-[c_0],c_0+2}, \bar{X}_{-[c_1]}) = \mu_0(s,c_0,c_1) - 2$ のとき $\mu_0(s,c_0,c_1) = |X| - c_0$ であるから $\mu_1(s,c_0,c_1) = |X| - c_0 - 1$ を満たし，x_{c_0+2} は非手番側のどの最大マッチングにおいても必ず辺がある．よってアルゴリズム 1 の 3 行目の条件を満たし，下から $c_0 + 1$ 枚目までの札は出せるなら最適である．

アルゴリズム 4 において，$0 \le c \le c_0$ のとき $\mu_0(s,c,c_1) \ge |X| - c_0$ は $\mu_0(s,c_0,c_1) = |X| - c_0$ と同値である．

$\mu_0(s,c_0,c_1) = |X| - c_0$ のとき $\mu_1(s,c_0,c_1) = |X| - c_0 - 1$ より，アルゴリズム 3 の場合と同じく非手番側のマッチング数が増加しないので最適である．

一方で $\mu_0(s,c_0,c_1) < |X| - c_0$ のとき，下から c_0+2 番目の札は出せる最小か，もしくはより弱い札を出せるが c_0+2 番目の札が手番側の最大マッチングにおいて余っている場合なので，表 1 の $\mu(X_{-[c_0],c_0+2}, \bar{X}_{-[c_1+1]}) = \mu_0(s,c_0,c_1) - 1$ となる条件を満たし，最適である．

アルゴリズム 5 について，$\delta(s,c_0,c_1) > 0$ ではすべての c

（$0 \le c \le c_1$）に対して $\mu_1(s, c_0, c) = \mu_1(s, c_0, c_1)$ である[*9].

ゆえに，$\delta(s, c_0, c_1) = 1$ の条件の下では $c = c_1$ の場合のみを考えればよく，このときアルゴリズム 4 と等しくなるため最適である．

アルゴリズム 6 において，X の上から $\mu_0(s, c, c_1)$ 番目の札の強さを x，上から $\mu_0(s, c_0, c_1)$ 番目の札の強さを x' とする（$x \le x'$ となる）．$\mu_0(s, c_0, c_1) = |X| - c_0$ または $x \le r$ のとき，アルゴリズム 4 と一致するので最適である．

$\mu_0(s, c_0, c_1) < |X| - c_0$ かつ $x > r$ のときを考える．$\bar{X}$ 内に x' より小さい札が十分にあり，最大マッチングにおいて X 内で強さ x' の札がすべて $\bar{X}$ 内の札とマッチすることが可能であれば，$\mu(X_{[c_0]}, \bar{X}_{[c_1+1]}) = \mu_0(s, c_0, c_1)$ である．そうでないとき，場札を除くとマッチング数が 1 減り強さ x' の札はマッチングのない札の中で最も大きいので $x' = \gamma(X_{[c_0]}, \bar{X}_{[c_1+1]})$ である．これはアルゴリズム 1 の 5, 6 行目に該当し，$x_{c_0+2} \le x \le x'$ よりいずれの場合も x を出す手は最適である．

アルゴリズム 7 において，$\delta(s, c_0, c_1) > 0$ のとき前述の通りすべての c（$0 \le c \le c_1$）に対して $\mu_1(s, c_0, c) = \mu_1(s, c_0, c_1)$ であり，特に $\delta(s, c_0, c_1) = 1$ ならば $c = c_1$ の場合アルゴリズム 6 と等しくなるため最適である． □

アルゴリズム 3，4，5 の最適性から以下の系 5 を得る．

系 5. 二人単貧民の (c_0, c_1)-勝利条件において出せる札があれば，出せる最小札と下から $c_0 + 2$ 番目の札のどちらかは最適な提出札である．

特に $(0, 0)$-勝利条件では，出せる最小札と下から二番目の札のどちらかは最適な提出札である．

6. その他の性質

二人単貧民のその他の性質を本節にて紹介する．

6.1 マッチング数

アルゴリズム 1 では最適な手の必要十分な範囲を求めたが，$\delta \neq 1$ のときマッチング数の差 δ を減少させる手も含まれていた．マッチング数の差をできる限り「悪く」しない，言うなれば「安全な」「粘り強い」戦略に限定しても，基本的には同様の性質が成り立つ[*10].

系 6. 両プレイヤの手札がソート済みのとき，手札総数 N に対して時間計算量 $\mathcal{O}(N)$，空間計算量 $\mathcal{O}(1)$ で二人単貧民の一般化勝利条件におけるマッチング数の差 δ をできる限り減少させない手の必要十分な範囲を計算可能である．

6.2 勝利条件と最適戦略の関係

アルゴリズム 5，6，7 の最適性から，一般化勝利条件では手番側または非手番側の片方の勝利条件だけ見れば最適な手を選べる，という以下の系 7 を得る[*11].

系 7. 二人単貧民の局面 $s = (X, \bar{X}, r)$，$0 \le c_0 < |X|$ において $0 \le c < |\bar{X}|$ を満たすすべての c に対して (c_0, c)-最適である手が存在する．同じように，局面 s と $0 \le c_1 < |\bar{X}|$ において $0 \le c < |X|$ を満たすすべての c に対して (c, c_1)-最適である手が存在する．

7. おわりに

本稿では二人単貧民の勝利条件を残り手札枚数に対して一般化して考察した．結果として，通常の二人単貧民において成り立つ性質の多くがこの新たな勝利条件においても成り立ち，必勝プレイヤと最適な手の必要十分な範囲のいずれも線形時間で求められることを示した．

本稿の続きとなる研究として，残り枚数のミニマックス値を巡る議論 [9] がある．こちらでは，本研究で得た「手札の残り枚数に対して一般化した勝敗の議論を適用できる」という結果を利用して二人単貧民の性質の検証を進めているので，ぜひご覧いただきたい．

参考文献

[1] 田頭幸三，但馬康宏：コンピュータ大貧民におけるヒューリスティック戦略の実装と効果，情報処理学会論文誌, Vol. 57, No. 11, pp. 2403–2413 (2016).

[2] 大渡勝己，田中哲朗：方策勾配を用いた教師有り学習によるコンピュータ大貧民の方策関数の学習とモンテカルロシミュレーションへの利用，情報処理学会研究報告, 2016-GI-35，No. 10, pp. 1–8 (2016).

[3] 桑原和人，保木邦仁：大貧民の状態価値 (期待順位) の強化学習，情報処理学会研究報告, 2018-GI-39，No. 7, pp. 1–8 (2018).

[4] 西野順二：単貧民における多人数完全情報展開型ゲームの考察，ゲームプログラミングワークショップ 2007 論文集, pp. 66–73 (2007).

[5] 木谷裕紀，小野廣隆：二人単貧民の必勝判定問題，火の国情報シンポジウム 2017 論文集, B5-4 (2017).

[6] 木谷裕紀，小野廣隆：二人単貧民の必勝判定アルゴリズムとその拡張について，火の国情報シンポジウム 2018 論文集, A3-4 (2018).

[7] 木谷裕紀, 大渡勝己, 小野廣隆：８切りルールを含む二人単貧民の必勝判定問題，情報処理学会研究報告, 2018-GI-40, No. 3, pp. 1–5 (2018).

[8] 木谷裕紀，大渡勝己，小野廣隆：不完全情報二人単貧民分析のためのオラクルモデル，ゲームプログラミングワークショップ 2019 論文集，pp. 258–265 (2019).

[9] 大渡勝己，木谷裕紀：負け側の残り枚数を最大化する二人単貧民の解析，ゲームプログラミングワークショップ 2020 発表予定 (2020).

[*9] $\delta(s, c_0, c_1) > 0$ ならば，非手番側からの下向き最大マッチングにおいてマッチングの無い札が必ずあるため，弱い札を追加しても非手番側のマッチング数は増加しない．

[*10] 定理 3 の証明中の議論は $\delta \neq 1$ の場合でも成り立つことが根拠である．このような提出札の範囲も，最適な提出札の範囲と同様に切れ目のない一つまたは空の区間である．

[*11] この性質は，自分の勝利条件のみ定めた場合には「自分の手札枚数がその枚数に至るまでに相手の残り手札をできる限り減らさない手」，逆に相手の勝利条件のみ定めた場合には「相手の手札枚数がその枚数に至るまでに自分の手札をできる限り減らすような手」が双方の勝利条件を定めても最適であることを意味している．