大規模行列の特異値分解へのOQDS法の適用

田中 博基[1]　木村 泰己[2,a)]　松縄 哲明[2]　三本木 省次[2]　髙田 雅美[3,b)]　木村 欣司[4,c)]
中村 佳正[1,d)]

概要：半導体製造において，リソグラフィシミュレーションモデルが重要である．このモデルを構築する際，大規模密行列の部分特異値分解が必要となる．部分特異値分解のための方法として，AIRLB（augmented implicitly restarted Lanczos bidiagonalization）アルゴリズムがある．本稿では，大規模密行列の部分特異値分解のために，AIRLB アルゴリズムの改良を行う．改良法では，計算途中で必要となる小さな行列の特異値分解のために，QR アルゴリズムではなく，OQDS（orthogonal-qd-with-shift）アルゴリズムを適用する．これにより，高精度な特異値を持つ特異値分解が行われる．数値実験の結果，既存の QR アルゴリズムを用いる AIRLB アルゴリズムと比較して，提案した改良が有効に機能していることが確認できる．精密な議論を行うため, 大規模疎行列と大規模密行列の両方を実験の対象としている．

Application of the Orthogonal QD algorithm with Shift to Singular Value Decomposition for Large Matrices

1. はじめに

リソグラフィシミュレーションモデルは，半導体製造において必要不可欠である．しかしながら，そのモデルが線型システムで定義されている場合，大きい特異値と非常に小さい特異値の成分が混在した不適切問題となる [7]．そのため，正則化手法が適用される．一般的な正則化手法として，Tikhonov 正則化もしくは部分特異値分解が用いられる．その中で，元の問題は, ペナルティ付きの最小二乗問題に置き換えられる．その結果，解は測定による制約の影響を受けにくくなる．ペナルティ項の正則化行列は，単位行列やラプラス演算子など様々な背景において提案されている．しかしながら，解の概形が事前情報として与えられている場合でも，適切な正則化行列を選択する方法は未解決問題である．論文 [7] では，前処理行列を用いた正則化手法を適用することにより，解に期待される制約を追加する方法を提案している．この正則化手法により，いくつかの大きな特異値とそれに対応する特異ベクトルを用いた最小二乗最小ノルム解が，物理的に適切な事前情報に基づく合理的な解と一致するため，正確なシミュレーションモデルの構築が可能となる．部分特異値分解のための手法として，AIRLB（augmented implicitly restarted Lanczos bidiagonalization）アルゴリズム [3][4] がある．すなわち，論文 [7] を適切に用いるためには，高精度な AIRLB アルゴリズムの実行が必要となる．

AIRLB アルゴリズムは，クリロフ部分空間法の 1 つで，GKL（Golub–Kahan–Lanczos）アルゴリズムを改良したものである．リスタート法を用いることにより，AIRLB アルゴリズムにおいて必要なメモリと計算時間を少なくすることができる．AIRLB アルゴリズムでは，小さな行列に対する特異値分解が各反復で実行される．従来の方法では，この小さな行列に対する特異値分解を QR アルゴリズム [5] によって行っている．しかしながら，QR アルゴリズムによって得られる特異値の精度は，十分ではない場合がある．

本稿では，AIRLB アルゴリズムの精度を向上させるための改善方法を述べる．具体的には，石田らにより改善され

1 京都大学
Kyoto University, Kyoto, Kyoto 606–8501, JAPAN
2 KIOXIA
KIOXIA Corporation, Minato-ku, Tokyo 108–0023, JAPAN
3 奈良女子大学
Nara Women's University, Nara, Nara 630–8506, JAPAN
4 福井大学
University of Fukui, Fukui, Fukui 910–8507, JAPAN
a) taiki2.kimura@kioxia.com
b) takata@ics.nara-wu.ac.jp
c) kkimur@u-fukui.ac.jp
d) ynaka@i.kyoto-u.ac.jp

Algorithm 1 AIRLB アルゴリズム

Set an n-dimensional unit vector $\tilde{\boldsymbol{v}}_1$, $i \leftarrow 1$
repeat
  $\tilde{P}_i \leftarrow \left[\tilde{\boldsymbol{v}}_1, \tilde{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \tilde{\boldsymbol{v}}_i\right]$
  while $i \leq k$ **do**
    $\boldsymbol{u} \leftarrow A\tilde{\boldsymbol{v}}_i$, Reorthogonalization$(\tilde{Q}_i, \boldsymbol{u})$
    $\tilde{\alpha}_i \leftarrow ||\boldsymbol{u}||$, $\tilde{\boldsymbol{u}}_i \leftarrow \boldsymbol{u}/\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{Q}_i \leftarrow \left[\tilde{\boldsymbol{u}}_1, \tilde{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \tilde{\boldsymbol{u}}_i\right]$
    $\boldsymbol{v} \leftarrow A^\top \tilde{\boldsymbol{u}}_i$,Reorthogonalization$(\tilde{P}_i, \boldsymbol{v})$
    $\tilde{\beta}_i \leftarrow ||\boldsymbol{v}||$, $\tilde{\boldsymbol{v}}_{i+1} \leftarrow \boldsymbol{v}/\tilde{\beta}_i$, $\tilde{P}_{i+1} \leftarrow \left[\tilde{\boldsymbol{v}}_1, \tilde{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \tilde{\boldsymbol{v}}_{i+1}\right]$
    $i \leftarrow i + 1$
  end while
  $\tilde{\boldsymbol{v}}_{\ell+1} \leftarrow \tilde{\boldsymbol{v}}_{k+1}$
  Compute the singular value decomposition of $\tilde{B}_k = \tilde{U}_k \tilde{\Sigma}_k \tilde{V}_k^\top$
  for $i = 1, \ldots, \ell$ **do**
    $\tilde{\rho}_i \leftarrow \tilde{\beta}_k \tilde{\boldsymbol{u}}_i(k)$
  end for
  $\tilde{B}_k(1:\ell, 1:\ell) \leftarrow \tilde{\Sigma}_k(1:\ell, 1:\ell)$, $\tilde{Q}_k \leftarrow \tilde{Q}_k \tilde{U}_k(:, 1:\ell)$, $\tilde{P}_k \leftarrow \tilde{P}_k \tilde{V}_k(:, 1:\ell)$
  $i \leftarrow \ell + 1$
until $\max_{1 \leq i \leq \ell} \dfrac{|\tilde{\rho}_i|}{\sqrt{2}} \leq \delta$ (threshold value)
$\tilde{\boldsymbol{u}}_i \leftarrow \tilde{Q}_k(:, i), \tilde{\boldsymbol{v}}_i \leftarrow \tilde{P}_k(:, i)$
Output $(\tilde{\sigma}_i, \tilde{\boldsymbol{u}}_i, \tilde{\boldsymbol{v}}_i)$ for $i = 1, \ldots, \ell$

た AIRLB アルゴリズム [6] のさらなる改善を行う．具体的には，QR アルゴリズムの代わりに，OQDS（orthogonal-qd-with-shift）アルゴリズム [1][8] を用いて内側の小さな行列の特異値分解を行うことにより，高精度化を目指す．

2. Augmented Implicitly Restarted Lanczos Bidiagonalization Algorithm

AIRLB アルゴリズムは，GKL アルゴリズムにリスタート法を適用することによって改良したクリロフ部分空間法の 1 つである．GKL アルゴリズムは，各反復で，クリロフ部分空間を拡張し，近似行列が得られるまで新しい基底ベクトルを追加する．そのため，再直交化には，大量のメモリと計算時間が必要である．再直交化のコストを削減するためには，クリロフ部分空間の基底数を制限するべきである．この制限された部分空間の情報を用いて，次の反復の際に必要となる初期ベクトルを得る．この操作のことをリスタート法と呼ぶ．AIRLB アルゴリズムでは，リスタート法を GKL アルゴリズムに適用し，大きな特異値とそれに対応する特異ベクトルを取得する．大規模行列の場合，GKL アルゴリズムよりも高速で，使用するメモリを少なくすることができる．ℓ を必要な特異値と特異ベクトルの数とし，k をクリロフ部分空間の基底数とする．一般的に，クリロフ部分空間における基底数 k は，所望の数 ℓ の約 2 倍に設定される．アルゴリズム 1 は，このアルゴリズムの疑似コードである．

3. 改良方法

3.1 石田らにより改良された AIRLB アルゴリズム

AIRLB アルゴリズムでは，小さな行列 $\tilde{B}_k$ の特異値分解が内部で実行され，その結果がリスタート時に利用される．計算誤差が考慮されない場合，取得された特異ベクトルは直交する．しかしながら，計算機上では，計算誤差が生じるため，特異ベクトルが十分に直交しない場合がある．これを回避するために，Householder refrector を用いた QR 分解を用いることによって，石田らは，$\tilde{B}_k$ の特異ベクトルの直交性を改善している [6]．本稿では，Householder refrector の代わりに，修正 Gram–Schmidt アルゴリズムを用いて速度を改善する．

改良された AIRLB アルゴリズムは，修正 Gram–Schmidt アルゴリズムによって，QR 分解 $\tilde{V}_\ell = Q_v R_v$ を行い，$\tilde{V}_\ell$ の直交性を改善する．直交行列 Q_v を新しい $\tilde{V}_\ell$ とする場合，

$$\tilde{V}_\ell \leftarrow \left[\tilde{\boldsymbol{v}}_1, \tilde{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \tilde{\boldsymbol{v}}_\ell\right], \quad \tilde{V}_\ell = Q_v R_v, \quad \tilde{V}_\ell \leftarrow Q_v. \quad (1)$$

となる．左特異ベクトル $\tilde{U}_\ell$ は，$\tilde{V}_\ell$ の場合と同じ手順で，直交化することができる．

$$\tilde{U}_\ell \leftarrow \left[\tilde{\boldsymbol{u}}_1, \tilde{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \tilde{\boldsymbol{u}}_\ell\right], \quad \tilde{U}_\ell = Q_u R_u, \quad \tilde{U}_\ell \leftarrow Q_u. (2)$$

この改良では，$\tilde{V}_\ell$ と $\tilde{U}_\ell$ の直交性が改善する．しかし，$\tilde{V}_\ell$ と $\tilde{U}_\ell$ が，

$$\tilde{B}_k \tilde{V}_\ell = \tilde{U}_\ell \tilde{\Sigma}_\ell, \quad \tilde{B}_k^\top \tilde{U}_\ell = \tilde{V}_\ell \tilde{\Sigma}_\ell. \quad (3)$$

を満たさなくなる可能性がある．式 (3) を満たすために，石田らは，$\tilde{\Sigma}_k(i,i) = \tilde{u}_i^\top \tilde{B}_k \tilde{v}_i$ として定義されたレイリー商 [9] を用いる．これにより，式 (3) を満たさなくなる可能性を排除できる．アルゴリズム 2 は，疑似コードである．

3.2 Orthogonal-qd-with-shift Algorithm

OQDS アルゴリズム [8] は，相対誤差の点で高精度な特異値を計算することができる．$L^{(i)}$ を $n \times n$ の下 2 重対角行列，$U^{(i)}$ を $n \times n$ を上 2 重対角行列とすると，

$$L^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(i)} & & & \\ \beta_1^{(i)} & \alpha_2^{(i)} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{n-1}^{(i)} & \alpha_n^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$U^{(i)} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(i)} & \zeta_1^{(i)} & & \\ & \gamma_2^{(i)} & \ddots & \\ & & \ddots & \zeta_{n-1}^{(i)} \\ & & & \gamma_n^{(i)} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

と表される．OQDS アルゴリズムでは，次の 3 つの処理を繰り返すことによって $L^{(i)}$ と $U^{(i)}$ を求める．

Algorithm 2 石田らにより改良された AIRLB アルゴリズム

Set an n-dimensional unit vector $\tilde{\boldsymbol{v}}_1$, $i \leftarrow 1$
repeat
  $\tilde{P}_i \leftarrow \left[\tilde{\boldsymbol{v}}_1, \tilde{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \tilde{\boldsymbol{v}}_i\right]$
  while $i \leq k$ **do**
    $\boldsymbol{u} \leftarrow A\tilde{\boldsymbol{v}}_i$, Reorthogonalization($\tilde{Q}_i, \boldsymbol{u}$)
    $\tilde{\alpha}_i \leftarrow ||\boldsymbol{u}||$, $\tilde{\boldsymbol{u}}_i \leftarrow \boldsymbol{u}/\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{Q}_i \leftarrow \left[\tilde{\boldsymbol{u}}_1, \tilde{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \tilde{\boldsymbol{u}}_i\right]$
    $\boldsymbol{v} \leftarrow A^\top \tilde{\boldsymbol{u}}_i$, Reorthogonalization($\tilde{P}_i, \boldsymbol{v}$)
    $\tilde{\beta}_i \leftarrow ||\boldsymbol{v}||$, $\tilde{\boldsymbol{v}}_{i+1} \leftarrow \boldsymbol{v}/\tilde{\beta}_i$, $\tilde{P}_{i+1} \leftarrow \left[\tilde{\boldsymbol{v}}_1, \tilde{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \tilde{\boldsymbol{v}}_{i+1}\right]$
    $i \leftarrow i+1$
  end while
  $\tilde{\boldsymbol{v}}_{\ell+1} \leftarrow \tilde{\boldsymbol{v}}_{k+1}$
  Compute the singular value decomposition of $\tilde{B}_k = \tilde{U}_k \tilde{\Sigma}_k \tilde{V}_k^\top$
  Compute the QR decomposition $\tilde{V}_\ell = Q_v R_v$ **using the modified Gram–Schmidt algorithm**
  $\tilde{V}_\ell \leftarrow Q_v$
  Compute the QR decomposition $\tilde{U}_\ell = Q_u R_u$ **using the modified Gram-Schmidt algorithm**
  $\tilde{U}_\ell \leftarrow Q_u$
  $\tilde{\Sigma}_k(i,i) \leftarrow \tilde{u}_i^\top \tilde{B}_k \tilde{v}_i$ for $i = 1, \ldots, \ell$
  for $i = 1, \ldots, \ell$ **do**
    $\tilde{\rho}_i \leftarrow \tilde{\beta}_k \tilde{\boldsymbol{u}}_i(k)$
  end for
  $\tilde{B}_k(1:\ell, 1:\ell) \leftarrow \tilde{\Sigma}_k(1:\ell, 1:\ell)$, $\tilde{P}_k \leftarrow \tilde{P}_k \tilde{V}_\ell$, $\tilde{Q}_k \leftarrow \tilde{Q}_k \tilde{U}_\ell$, $i \leftarrow \ell + 1$
until $\max_{1 \leq i \leq \ell} \frac{|\tilde{\rho}_i|}{\sqrt{2}} \leq \delta$ (threshold value)
$\tilde{\boldsymbol{u}}_i \leftarrow \tilde{Q}_k(:, i), \tilde{\boldsymbol{v}}_i \leftarrow \tilde{P}_k(:, i)$
Output $(\tilde{\sigma}_i, \tilde{\boldsymbol{u}}_i, \tilde{\boldsymbol{v}}_i)$ for $i = 1, \ldots, \ell$

(1) $0 \leq u^{(i)} \leq \sigma_{\min}\left(L^{(i)}\right)$ を満たすシフト $u^{(i)}$ の計算.

(2) LU step

$$P^{(i)} \begin{pmatrix} L^{(i)} \\ t^{(i)} I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^{(i)}, \\ t^{(i+1)} I_n \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$t^{(i+1)} = \sqrt{\left(t^{(i)}\right)^2 + \left(u^{(i)}\right)^2} \tag{7}$$

(3) UL step

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ O & \left(Q^{(i)}\right)^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{(i)} \\ t^{(i+1)} I_n \end{pmatrix} Q^{(i)} = \begin{pmatrix} L^{(i+1)} \\ t^{(i+1)} I_n \end{pmatrix}. \tag{8}$$

ここで，$P^{(i)}$ と $Q^{(i)}$ は，$2n \times 2n$ と $n \times n$ の直交行列である．$P^{(i)}$ は，Givens 回転と一般化 Givens 回転 [8] によって構成される．$Q^{(i)}$ は，Givens 回転で構成される．$t^{(i_0)} I_n$ は，同じ値を持つ対角行列である．Σ を特異値が降順に並ぶ対角行列とする．$L^{(i_0)}$ が対角行列に収束する際，もし計算途中でスプリット処理が行われていない場合，$\Sigma(k,k) = \sqrt{\left(L^{(i_0)}(k,k)\right)^2 + \left(t^{(i_0)}\right)^2}$ $(k = 1, \cdots, n)$ となる．右特異ベクトルを得るために，直交行列 V を $V = Q^{(0)} \cdots Q^{(i_0-1)}$. によって計算する．Givens 回転を使うことにより，$L^{(i_0)}$ に $t^{(i_0)} I_n$ を加算する．これにより，$L^{(i_0)}$ と $t^{(i_0)} I_n$ は，Σ と 0 行列になる．U' は，

$$U' = \begin{pmatrix} I_n & O \end{pmatrix} \left(P^{(0)}\right)^\top \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & Q^{(0)} \end{pmatrix} \cdots \left(P^{(i_0-1)}\right)^\top \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & Q^{(i_0-1)} \end{pmatrix} \left(P^{(i_0)}\right)^\top, \tag{9}$$

のように定義される．ここで，$\left(P^{(i_0)}\right)^\top$ は，$t^{(i_0)} I_n$ を $L^{(i_0)}$ に足し込むために用いられる．

U' は，次の 2 つの部分に分割される．

$$U' = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

$n \times n$ の直交行列 U_{11} は，左特異ベクトルによって構成される．

4. 数値実験

次の 6 種類の AIRLB アルゴリズムを用いて，反復回数，特異値の誤差，特異ベクトルの直交性を比較する．

- AIRLB(O): QR アルゴリズムを用いた従来の AIRLB アルゴリズム
- AIRLB(IO): QR アルゴリズムを用いた石田らの改良による AIRLB アルゴリズム
- AIRLB(M): 高精度 Givens 回転 [2] が適用された QR アルゴリズムを用いた従来の AIRLB アルゴリズム
- AIRLB(IM): 高精度 Givens 回転 [2] が適用された QR アルゴリズムを用いた石田らの改良による AIRLB アルゴリズム
- AIRLB(S): OQDS アルゴリズムを用いた従来の AIRLB アルゴリズム
- AIRLB(IS): OQDS アルゴリズムを用いた石田らの改良による AIRLB アルゴリズム

AIRLB アルゴリズムは，[4][3] に記載されているアルゴリズムを用いる．AIRLB アルゴリズムのために，求める特異値の数とクリロフ部分空間の基底ベクトルの数が必要となる．本実験では，それぞれ，$\ell = 10$，$k = 20$ とする．

テスト行列として，次の 2 種類を用いる．

1 つ目は，疎なランダム行列 $A_6 \in \mathbb{R}^{1{,}000{,}000 \times 1{,}000{,}000}$, $A_7 \in \mathbb{R}^{1{,}500{,}000 \times 1{,}500{,}000}$, $A_8 \in \mathbb{R}^{2{,}000{,}000 \times 2{,}000{,}000}$ である．各行には，$[0,1)$ のランダムな値とランダムな行の位置を割り当てた $1{,}000$ 個の要素を配置する．

2 つ目は，密なランダム行列 $B_1 \in \mathbb{R}^{10{,}000 \times 10{,}000}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{20{,}000 \times 20{,}000}$, $B_3 \in \mathbb{R}^{30{,}000 \times 30{,}000}$, $B_4 \in \mathbb{R}^{40{,}000 \times 40{,}000}$, $B_5 \in \mathbb{R}^{50{,}000 \times 50{,}000}$ である．各行のすべての要素は，$[0,1)$ のランダムな値で構成されている．

実験結果を**表 1** に示す．

5. まとめ

本稿では，石田らによって改良された AIRLB アルゴリズムに OQDS アルゴリズムを適用している．クリロフ部分空間では，クラスター化している特異値が収束速度に大

表 1 Experimental results

	AIRLB(O)	AIRLB(IO)	AIRLB(M)	AIRLB(IM)	AIRLB(S)	AIRLB(IS)
特異値の誤差 [10^{-13}]						
A_6	68.81	45.99	57.08	44.71	28.26	4.38
A_7	75.59	30.60	66.10	31.07	68.10	6.07
A_8	128.93	78.45	108.71	79.32	76.76	7.12
B_1	10.89	9.14	10.89	8.61	9.14	3.66
B_2	23.49	17.38	21.73	17.60	17.23	6.10
B_3	123.82	114.94	123.71	115.06	24.70	9.52
B_4	98.94	75.23	97.19	76.02	44.96	14.48
B_5	80.47	67.11	80.95	65.91	37.70	18.04
V の直交性 [10^{-13}]						
A_6	8.32	0.06	5.85	0.16	5.44	0.15
A_7	14.80	0.31	11.02	0.38	12.17	0.15
A_8	19.47	0.17	13.28	0.29	12.39	0.26
B_1	0.67	0.02	0.55	0.02	0.57	0.01
B_2	1.03	0.03	0.94	0.03	0.91	0.02
B_3	1.70	0.03	1.23	0.04	1.29	0.05
B_4	2.44	0.04	1.66	0.05	1.53	0.04
B_5	1.63	0.06	0.75	0.05	0.97	0.06
U の直交性 [10^{-13}]						
A_6	3.04	0.11	6.26	0.14	6.15	0.15
A_7	10.47	0.24	10.80	0.34	12.05	0.37
A_8	8.93	0.19	13.20	0.22	14.14	0.29
B_1	0.47	0.01	0.39	0.02	0.48	0.03
B_2	0.86	0.02	0.74	0.02	0.68	0.02
B_3	1.73	0.03	1.37	0.04	1.22	0.04
B_4	2.11	0.02	1.39	0.03	1.78	0.03
B_5	1.37	0.06	1.12	0.08	1.04	0.06

きく影響するため，その特異値を正確に計算する必要がある．

数値実験の結果，特異値の誤差と特異ベクトルの直交性に関して，石田らによって改良された AIRLB アルゴリズムは，既存の AIRLB アルゴリズムより良好であることが確認できた．また，実問題に類似した密なランダム行列をテスト行列とした場合の実験結果において，OQDS アルゴリズムを用いた方が QR アルゴリズムを用いた場合よりも正確な特異値を計算できることが確認できた．すなわち，提案手法は，大規模疎行列と大規模密行列の部分特異値分解の改良法として有効である．これにより，リソグラフィシミュレーションモデリングにおいて，より適切な解を得られる．計算時間と反復回数に関しては，すべての実験結果より，有意差は確認されていない．

謝 辞 本研究は JSPS 科研費 JP17H02858 と JP17H00167 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] Araki, S.,Tanaka, H., Takata, M., Kimura, K., and Nakamura, Y.: *Fast Computation Method of Column Space by Using the DQDS Method and the OQDS Method*, Proc. of PDPTA 2018, pp. 333–339 (2018)

[2] Araki, S., Takata, M., Kimura, K., Nakamura, Y.: *On an implementation of two-sided Jacobi method*, Proc. of PDPTA 2019, pp. 156–162 (2019)

[3] Baglama, J., Reichel, L.: *Augmented implicitly restarted Lanczos bidiagonalization methods*, SIAM Journal on Scientific Computing 27(1), pp. 19–42 (2005)

[4] Calvetti, D., Reichel, L., Sorensen, D.C.: *An implicitly restarted Lanczos method for large symmetric eigenvalue problems*, Electronic Transactions on Numerical Analysis, 2(1), pp. 1–21 (1994)

[5] Demmel, J., Kahan, W.: *Accurate singular values of bidiagonal matrices*, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing 11(5), pp. 873–912 (1990)

[6] Ishida, Y., Takata, M., Kimura, K., Nakamura, Y.: *Improvement of the augmented implicitly restarted Lanczos bidiagonalization method in single precision floating point arithmetic*, IPSJ Trans. Modeling Appl., Vol. 11, pp. 19–25 (2018)

[7] T. Kimura, T. Matsunawa, and S. Mimotogi.: *Regularized Minimum Norm Least Squares Solution using Preconditioning Technique for Semiconductor Process Modeling*, IPSJ Trans. Modeling Appl., Vol. 12, pp. 26–36 (2019).

[8] Matt., U. von: *The orthogonal qd-algorithm*, SIAM J. Sci. Comput., Vol. 18, pp. 1163–1186 (1997)

[9] Parlett, B.N.: *The Symmetric Eigenvalue Problem*, Society for Industrial and Applied Mathematics (1998)