

最初に考えること： 何を行うのか

真鍋義文 | 工学院大学

アルゴリズムとは

この連載は、アルゴリズムをまったく知らない人がアルゴリズムを学ぶことを目的としています。皆さんはアルゴリズムという言葉聞いたことがありますか？ 聞いたことがない人も、スマホにアプリをダウンロードして使ったことがある人は多いでしょう。アプリは、皆さんが行いたい作業（チャット、ゲーム、その他いろいろありますね）を行ってくれるものです。そこには、必ずアルゴリズムが使われています。

スマホのアプリはプログラムの一種です。そこで、アルゴリズムの前にプログラムの説明をします。スマホやパソコンの中にはCPU（中央処理装置）が入っています。これは主な処理を行う、人であれば脳にあたる部分です。スマホのチャットであれば、画面のどのあたりをタッチしたかというデータから送信メッセージを作ったり、受信したデータを文字に変えて画面に表示したりする処理を行うのがCPUです。CPUは足し算やかけ算など、さまざまな計算を行うことができますが、チャットなどの複雑な作業を行うにはそれらの単純な計算を組み合わせて実行する必要があります。チャットの作業を行うために足し算やかけ算などをどのような順序で実行すればいいかをCPUは知らないため、そのやり方をCPUに教える必要があります。このやり方を示した手順書がチャットのプログラムです。人がプログラムの形で手順を書き、その手順に従ってCPUが処理をすることで、目的の作業（たとえば

チャットやゲームなど）を行うことができます。

しかし、目的の作業を行うやり方は1通りとは限りません。たとえば道が碁盤の目のようになっている京都や札幌の町で北西に行くときには、まず北に進んで次に西に進む、まず西に進んで次に北に進む、という2つのやり方が考えられます。

プログラムの場合も、1つの作業をするやり方はいく通りも考えられます。このやり方のことをアルゴリズムと呼びます。プログラムを行った結果のよしあしは、アルゴリズムのよしあしに大きく左右されます。この連載では、良いアルゴリズムとはどのようなもので、どのようにして良いアルゴリズムを得るか、について説明します。

アルゴリズムを考えるときには、まず「何を行うのか」という作業の目標を決める必要があります。目標があいまいであれば、やり方も決められません。この第0回目では「何を行うのか」という目標設定について例を挙げて説明をします。

ケーキ分割問題

目標設定の例として、ケーキ分割問題を考えます。図-1の細長いケーキを2人で分けます。この場合、目標はどうなるでしょうか？ もちろん、2人の取り分が同じになるように分けられればベストです。ケーキではなくようかんであれば、大きさが同じになるように2つに分けることは簡単にできて、それでいいでしょう。しかし、図-1のケーキは右端にだけイチゴが多いので、大きさが同じになるように



2つに分けてもそれらは同じにはなりません。のっているイチゴやキウイを1つ1つ取り出して2つに分ければよい、という人もいるかもしれませんが、数が多いとたいへんです。同じにすることはあきらめざるを得ない場合も多いでしょう。

さらにやっかいな話として、人によって好みが変わることがあります。イチゴが大好きな人や、フルーツの種類にこだわりのない人もいます。人の好みも考えたいです。

そこで、目標を「2人の取り分が同じになるように分ける」ではなく、「2人とも満足するように分ける」ことにします。満足していることを、どのように目標としてきちんと表すことができるでしょうか？

満足していることを、2人とも「自分の取り分の価値は、相手の取り分の価値以上である（自分の好みの尺度で見て、同じか、自分の取り分の方が良い）」と感じていること、と表すことが考えられています（図-2）。太郎さんと花子さんの2人で分けたとき、図-2では左側を太郎さん、右側を花子さんがもらっています。太郎さんは自分がもらった左側の方が右側と同じか、より価値が高いと考えています。花子



図-1 右端にイチゴが多い細長いケーキ

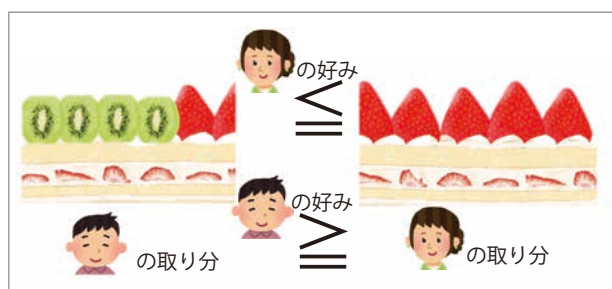


図-2 無羨望

さんは自分がもらった右側の方が左側と同じか、より価値が高いと考えています。このとき、相手の取り分を見て「あっちの方がいい」とうらやむことがないので、分け方に2人とも不満がありません。これを、うらやむことがない、という意味で無羨望と呼びます。

目標を「無羨望になるように分けること」と決めましょう。では、無羨望な分け方はどんなアルゴリズムで求められるのでしょうか？ ただし、ここでは2人とも相手の好みは分からないものとします。

2人の無羨望アルゴリズム

AとBの2人で分けるときは以下のアルゴリズムが考えられています。

1. Aがケーキを自分の好みで価値の等しい2つに切り分ける
2. Bが2つのうち好きな方を選ぶ
3. Aが残った方をもらう

この分け方が無羨望であることを説明します。まず、Bはステップ2で2つのうち自分にとって良い方を選べば残ったAの取り分の価値以上のものをもらうことができます。また、Aにとって2つの価値は同じなので、Bがどちらを選んでも、自分の取り分はBの取り分の価値と同じとなります。

もし、Aがステップ1で手順に従わずに2つの価値が違うように切り分けた場合には価値が高い方をBに取られるかもしれません。Bの好みを知らないAがこれを避けるためには、手順の通りに2つの価値を等しくしなければいけません。

3人で分ける場合の無羨望なアルゴリズムはたとえば文献1)に、4人以上で分ける場合の無羨望なアルゴリズムは文献2)にあります。

無羨望アルゴリズムの問題点

無羨望という目標を満足するアルゴリズムが見つかったので、一見これで良いように思えますが、実はこのアルゴリズムには問題点があります。このアルゴリズムではAとBとで行う手順が違うため、誰にどちらの役目をしてもらうかを決めないとけません。ところがこのアルゴリズムは、Bに有利なものとなっています。最初に2つに切り分けるAは、2つの価値が同じになるように切ることで全体の価値の半分の価値をもらいますが、Bの好みはAの好みと違うときには、Aがもらったケーキは全体の価値の半分以上の価値となる場合があります。

このことを確かめるため、図-1のケーキで、イチゴが大好きな花子さんとフルーツにこだわりのない太郎さんでこのアルゴリズムを行ってみましょう。花子さんがAの役目を行うとしたら、花子さんはケーキを大きさを半分にすることはなく、左側を大きくするでしょう(図-3)。イチゴがもらえないのだとしたら、その分、ケーキを多くもらう、というのが花子さんにとって価値が同じになる分け方になります。この2切れを見た太郎さんは左側を選んで、半分より大きな価値をもらいます。

太郎さんがAの役目を行うとしたら、太郎さんはケーキを大きさが同じになるように切り分けるで

しょう(図-4)。この2切れを見た花子さんは、右側を選んでイチゴが多くのもっている分だけ半分より大きな価値をもらいます。

このことを知っていたら、このアルゴリズムを行うときに2人ともBの役目をやりたがります。仕方がないのでじゃんけんで役目を決めると、じゃんけんに負けてAの役目になった人は勝ってBの役目になった人をうらやむことになります。

じゃんけんは公平な決め方なのでこれでいい、という人もいるかもしれませんが、しかしじゃんけんで決めていいのであれば、「じゃんけんで勝った方がケーキを全部もらう」というアルゴリズムでもかまわない、ということになってしまいます。じゃんけんで価値の違うものを割り当てることはうらやむことが起きる良くないやり方です。

うらやむことがない無羨望のアルゴリズムのはずなのに、相手をうらやむという変なことになってしまいました。何がいけなかったのでしょうか？

それは、目標を無羨望としたことにあります。無羨望だけを目標としては、ほんとうに公平な分け方はできません。アルゴリズムの中での役目についての羨望(うらやむこと)がない、ということも目標に入れることが必要です。AとBでアルゴリズムを行うときにAの役目をする人がBの役目をする人をうらやむことがなくて、Bの役目をする人が

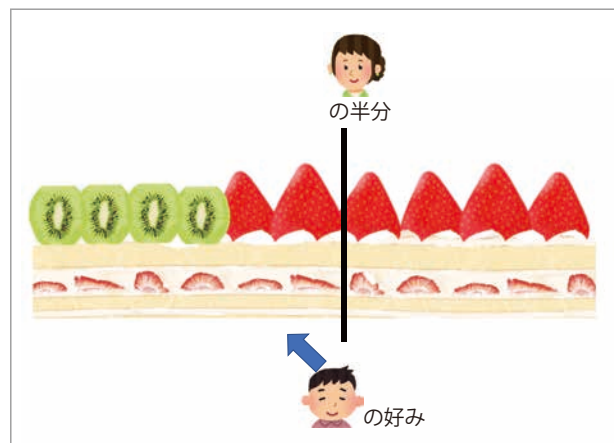


図-3 花子さんが半分に切る場合

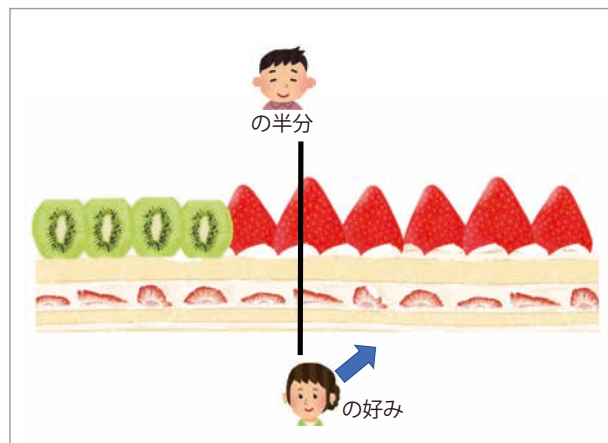


図-4 太郎さんが半分に切る場合

A の役目をする人をうらやむこともない、ということが必要になります³⁾。

役目の羨望がないアルゴリズム

そこで、目標を「役目についての羨望がなく、分け方は無羨望となる」に変えます。この新しい目標を達成するアルゴリズムの例は、以下のようになります。

1. A と B が、自分の好みで価値が半分になる場所を同時に示す
2. 2 人が示した場所が同じならば、その場所で切ってくじびきでどちらにするかを定める
3. そうでないときは、2 人が示した場所の真ん中で切って、それぞれが示した場所を含む方をもらう (図-5)

図-5 の例では、太郎さんの示した場所は、花子さんが示した場所より左側にあるので、太郎さんは真ん中の点線で切ったうちの左側を、花子さんは右側をもらいます。もしも太郎さんの示した場所が花子さんが示した場所よりも右側になった場合には、太郎さんが右側をもらいます。

このアルゴリズムの正しさは以下の通りです。

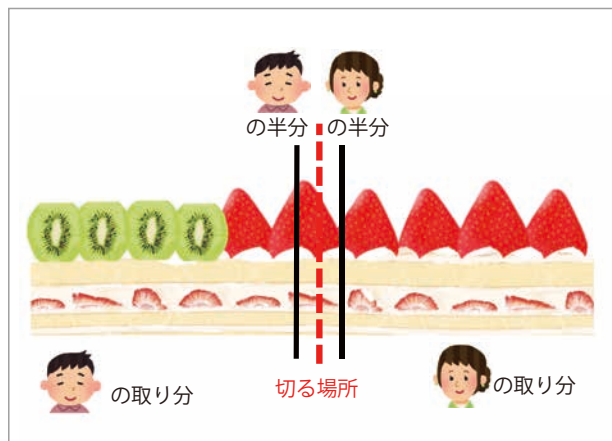


図-5 役目の羨望もないアルゴリズム

- (1) 2 人が示した場所が同じならば、この場所で切った 2 切れは A にとっても B にとってもちょうど半分の価値になります。ですから、くじびきの結果左右どちらをもらうことになっても無羨望です。
- (2) 2 人が示した場所が違うときには、A も B も自分の好みで半分よりも多くもらっていることになります。相手の取り分は半分より少ない、と思うので無羨望です。

また、このアルゴリズムでは A と B が行うことはまったく同じなので、役目について他の人をうらやむことはありません。このアルゴリズムは「役目についての羨望がなく、分け方は無羨望となる」という目標を満たしています。

目標設定の大切さ

ケーキ分割問題を例に、目標設定がまずいと良くない結果となることと、目標設定が違うとアルゴリズムも違ってくることを示しました。

アルゴリズムを考える場合には、まず最初に目標は何か、それは本当に正しい目標なのか、ということをよく考えることが必要です。

参考文献

- 1) 伊藤大雄：パズル・ゲームで楽しむ数学，森北出版，pp.34-35 (2010).
- 2) Aziz, H. and Mackenzie, S. : A Discrete and Bounded Envy-free Cake Cutting Protocol for Any Number of Agents, Proc. of IEEE 57th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), pp.416-427 (2016).
- 3) Manabe, Y. and Okamoto, T. : Meta-envy-free Cake-cutting and Pie-cutting Protocols, Journal of Information Processing, Vol.20, No.3, pp.686-693 (2012).

(2020 年 3 月 30 日受付)

真鍋義文 (正会員) manabe@cc.kogakuin.ac.jp

工学院大学情報学部システム数理学科教授。1985 年大阪大学大学院基礎工学研究科修士課程修了。同年日本電信電話 (株)、2013 年から工学院大学。分散アルゴリズム、暗号理論などに興味を持つ。博士 (工学)。