

推薦論文

トランプにおける最適なシャッフルの組合せ

井手 広康^{1,a)} 奥田 隆史^{2,b)}

受付日 2018年2月28日, 採録日 2018年9月7日

概要: トランプ, かるた, 花札などに代表されるカードゲームでは, 1回のゲームごとにデッキ (1組のカードの山) をシャッフルすることが一般的である. シャッフルにはヒンズー・シャッフル, リフル・シャッフル, デイール・シャッフルなどの手法が存在し, 複数のシャッフルを組み合わせて使用することも多い. しかしシャッフルに関する研究はこれまで十分に行われておらず, 最適なシャッフルの組合せについて明らかとなっていない. そこで本研究では, トランプを想定して複数のシャッフルを組み合わせてシミュレーションを行い, シャッフル結果から最適なシャッフルの組合せについて分析する.

キーワード: トランプ, シャッフル, 組合せ, カードゲーム, カットオフ現象

The Optimal Combination of Shuffles in Playing Cards

HIROYASU IDE^{1,a)} TAKASHI OKUDA^{2,b)}

Received: February 28, 2018, Accepted: September 7, 2018

Abstract: There are various kinds of card games, such as playing cards, karuta, and hanafuda. In these card games, it is common to shuffle a deck (a mountain of cards) for each game. In addition, there are various kinds of shuffle methods, such as hindu shuffle, riffle shuffle, and deal shuffle, we often use multiple shuffles in combination. However, research on shuffling has not been done sufficiently so far, and it is not clear about an optimum combination of shuffles. Therefore, in this research, we simulated by combining multiple shuffles assuming playing cards, and analyzed an optimal combination of shuffles.

Keywords: playing cards, shuffle, combination, card game, cutoff phenomenon

1. はじめに

トランプ, かるた, 花札などに代表されるカードゲームでは, 1回のゲームごとにデッキ (1組のカードの山) をシャッフルすることが一般的である. シャッフルにはヒンズー・シャッフル, リフル・シャッフル, デイール・シャッフルなどの手法 [1] が存在し, 複数のシャッフルを組み合わせて使用することも多い. しかしシャッフルに関する研究はこれまで十分に行われておらず, 最適なシャッフルの組合せについて明らかとなっていない. なおこれまでの

シャッフルに関する研究は, 大きく「単独のシャッフルを繰り返す解析的な研究 [2], [3], [4], [5], [6]」と「複数のシャッフルを組み合わせた実用的な研究 [7]」の2派がある.

前者の研究として, たとえば Diaconis ら [2], [3], [4], [5] は, カードの全変動距離 (variation distance) を定義してシャッフルの特性について解析し, “リフル・シャッフルでは, 7回目のシャッフルで急にデッキがよく混ざる”ことを明らかにした. これはマルコフ連鎖におけるカットオフ現象 (cutoff phenomenon) と呼ばれている. これらの研究成果は1990年1月9日に The New York Times でも報じられ, 広く世間に知られるようになった [8]. なお元々「カットオフ」という現象は, 古典統計力学の粒子の拡散モデルなどにおいて “平衡状態への収束の過程で観測されるある種の臨界現象”を指す用語である [9]. このようなカットオフ現象がリフル・シャッフルにおいても発生する

¹ 愛知県立大学大学院情報科学研究科
Graduate School of Information Science and Technology,
Aichi Prefectural University, Nagakute, Aichi 480-1198,
Japan

² 愛知県立大学情報科学部情報科学科
Department of Information Science and Technology, Faculty
of Information Science and Technology, Aichi Prefectural
University, Nagakute, Aichi 480-1198, Japan

a) k619154u@gmail.com

b) okuda@ist.aichi-pu.ac.jp

本論文の内容は2017年9月のFIT2017第16回情報科学技術フォーラムで報告され, プログラム委員長により情報処理学会論文誌ジャーナルへの掲載が推薦された論文である.

ことが Diaconis らによって証明された。本論文では以下、「カットオフ現象」とは Diaconis らの研究において観測された現象そのものではなく、本来の意味である「平衡状態への収束の過程で観測される臨界現象」を指す。

一方、後者の研究として野瀬ら [7] は、カードの移動回数を可視化したビットマップ画像を用いてシャッフルの特性について分析し、複数のシャッフルを組み合わせたことの有効性を明らかにした。しかしシャッフルを組み合わせた結果が定量化されていないため、複数の結果を数値的に比較することはできず、どのシャッフルの組合せが最適であるかまでは結論付けられていない。

そこで本研究では、野瀬らの研究 [7] における可視化の手法を発展させるとともに、シャッフル結果を定量化し、複数の結果を数値的に比較できるようにした。具体的にシャッフル結果の可視化では、ビットマップ画像に使用されている2色（白、黒）を発展させた3色（青、白、赤）を用いることで、より詳細にシャッフルの特性について把握することができるようにした。またシャッフル結果の定量化では、シャッフルのランダム性（カードの移動先がランダムである度合い）という観点からシャッフルの収束率を定義することで、最適なシャッフルの組合せについて結論付けることができるようにしている。

以下、まず2章では、3つのシャッフルに関する概要と、各シャッフルの手順について示す。次に3章では、シャッフル結果に対する分析手順（可視化と定量化の方法）について説明する。次に4章では、単独のシャッフルにおける最適なシャッフル回数と、複数のシャッフルにおける最適な組合せについて述べる。最後に5章では、本研究のまとめと今後の課題について述べる。

2. シャッフルの手順

本章では、カードゲームにおいて広く使用されているヒンズー・シャッフル、リフル・シャッフル、ディーラー・シャッフルの概要およびシャッフルの手順について説明する。ここでデッキのカード枚数を n とおき、各カードにデッキの上から順に番号 $1, 2, \dots, n$ を割り振る。またシャッフルによって $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 番目のカードを $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 番目に並べ替える操作を置換 π_i とおき、

$$\pi_i = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \quad (1)$$

と表す。またすべてのカードの置換を π とおき、 n 個の π_i について i の若い順に並べた

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

により表す。以下、デッキはジョーカーを省く52枚のトランプ ($n = 52$) を想定し、各シャッフルの手順は、野瀬らの研究 [7] に従うものとする。またデッキを分割したカー

ドの束をポケットと呼ぶ。

2.1 ヒンズー・シャッフル

ヒンズー・シャッフル (Hindu Shuffle) は日本を含め広く東洋で行われているシャッフルであり、「ヒンズー」という名は、欧米においてインドの奇術家たちがこのシャッフルを用いたことに由来する [1]。

ヒンズー・シャッフルによる1回のシャッフルの手順は次のとおりである（右利きによる場合）。

- (1) 右手に持ったデッキの上から、1つのポケットを左手で抜き取る。
- (2) これを左手のカードの上に重ねる（初回はポケットを左手に移動させるだけ）。
- (3) (1), (2) を右手のカードがなくなるまで繰り返す。ただし左手で抜き取るポケットのカードの枚数は、正規分布 $N(10, 5/3)$ に従うものとする。

たとえば、 $n = 10$ のデッキに対して左手で抜き取るポケットのカード枚数が3（固定値）である場合、ヒンズー・シャッフルの置換 π は次式で表すことができる。

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 9 & 10 & 5 & 6 & 7 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

2.2 リフル・シャッフル

リフル・シャッフル (Riffle Shuffle) は Diaconis らの研究 [2], [3], [4], [5], [6] において用いられたシャッフルである。ただしリフル・シャッフルはポケットを反らせるためカードが傷みやすく、トレーディングカードゲーム (TCG) の大会などでの使用は避けられる傾向にある [7]。

リフル・シャッフルには **Gilbert-Shannon-Reeds** モデル (GSR モデル) [7], [10] を使用し、この場合の1回のシャッフルの手順は次のとおりである。

- (1) デッキを二項分布に従い上下でポケット A, B に分割し、各ポケットのカード枚数を a, b とおく。
- (2) ポケット A からは確率 $a/(a+b)$ 、ポケット B からは確率 $b/(a+b)$ でカードをリフル（パラパラと落とすこと）させ重ね合わせる（カードがリフルするごとに a または b が1減る）。
- (3) 各ポケットのカード枚数が0になるまで(2)を繰り返し、1つのデッキにまとめる。

たとえば、 $n = 10$ のデッキに対して完全に交互にカードをリフルした場合、リフル・シャッフルの置換 π は次式で表すことができる（ただし GSR モデルでは、ある程度の枚数のカードが重なった状態でリフルされる*1）。

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \quad (4)$$

*1 完全にカードを交互にリフルするシャッフル（パーフェクト・シャッフル）は難易度が高く、実際には GSR モデルのようにある程度のカードが重なった状態でリフルされることになる。

2.3 ディール・シャッフル

ディール・シャッフル (Deal Shuffle) は1回のシャッフルに時間を要するため、TCGの大会ではシャッフル回数が制限されることも多い。またディール・シャッフルにランダム性がない(結果が一意的である)ため、単独での使用が禁止されている場合もある [11].

ディール・シャッフルによる1回のシャッフルの手順は次のとおりである。

- (1) デッキの上からカードを1枚ずつ d カ所に配置する。
- (2) (1)を繰り返し、 d 個のポケットを作成する (2周目以降は d カ所のカードの上に重ねる)。
- (3) d 個のポケットを任意の順序で重ね合わせ、1つのデッキにまとめる。

たとえば、 $n = 10$ のデッキに対して $d = 3$ でカードを配置した場合、ディール・シャッフルの置換 π は次式で表すことができる。

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 7 & 10 & 3 & 6 & 9 & 2 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

ただし本研究では、カードの配置箇所は $d = 10$ とし、ポケットを重ね合わせる順序は d カ所に配置したポケットのうち、まずは d が奇数のポケットを若い順に重ね、次に d が偶数のポケットを若い順に重ねる手順とする ($d = 10$ の場合は 1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8, 10 の順となる)。

3. シャッフル結果に対する分析手順

本章では、シャッフル結果に対する分析手順(可視化と定量化の方法)について説明する。本研究における1回のシミュレーションは、図1に示すように“デッキに対して単独あるいは複数のシャッフルを m 回実行する一連の操作”であるものとする。また1回のシミュレーションを1セットと表記し、 s セットのシャッフル結果に対して次の3つの手順から分析を行う。なお1セットごとにデッキは初期化されるものとする。

3.1 手順1: 理想値 $1/n$ との誤差の算出

まず s セットのシャッフル結果に対して、デッキの i 番

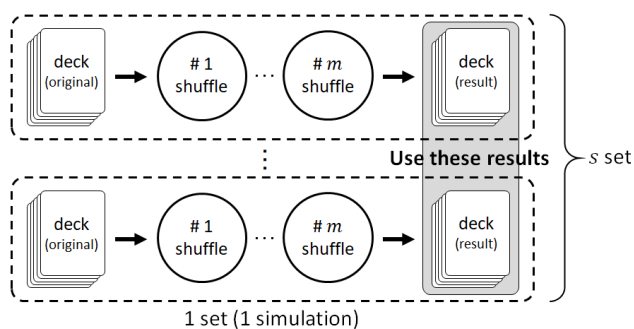


図1 シミュレーションの流れとシャッフル結果
Fig. 1 The flow of simulation and shuffle results.

目のカードが j 番目に移動した回数を

$$t_{i,j} \quad (0 \leq t_{i,j} \leq s) \quad (6)$$

とおき、全体の $t_{i,j}$ を集合 T_s の要素として

$$T_s = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & \dots & t_{1,n} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & \dots & t_{2,n} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & \dots & t_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n,1} & t_{n,2} & t_{n,3} & \dots & t_{n,n} \end{pmatrix} \quad (7)$$

のように n 次の正方行列として表す。たとえば100セットのシャッフル結果に対して、デッキの1番目のカードが3番目に10回移動していた場合、 $t_{1,3} = 10$ となる。なお野瀬らの研究 [7] では、式(7)の結果を $t_{i,j}$ の値に応じてグレースケール化し、シャッフル結果の可視化を行っている。

次に s セットのシャッフル結果に対して、デッキの i 番目のカードが j 番目に移動した頻度を

$$p_{i,j} = \frac{t_{i,j}}{s} \quad (0 \leq p_{i,j} \leq 1) \quad (8)$$

とおき、全体の $p_{i,j}$ を集合 P_s の要素として

$$P_s = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & \dots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & \dots & p_{2,n} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} & \dots & p_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & p_{n,3} & \dots & p_{n,n} \end{pmatrix} \quad (9)$$

のように n 次の正方行列として表す。たとえば先に示した例である場合、 $p_{1,3} = 0.1$ となる。

ここで理想的なシャッフルについて考察する。野瀬らの研究 [7] では、デッキの初期状態は式(7)をグレースケール画像へ変換した図2(a)で表すことができる (i はシャッフル前のカードの位置、 j はシャッフル後のカードの位置を表す)。そして理想的なシャッフルの条件(デッキが十分に混ざっている状態)を、シャッフル後のデッキが図2(b)のように一様になることが望ましいとしている。つまりデッキの i 番目のカードが j 番目に移動した回数(または頻度)がデッキ全体で等しい状態にあるといえる。しかし野瀬らの研究 [7] ではシミュレーション回数が $s = 100$ と少ないため、仮に理想的なシャッフルを使用した場合でも完全に

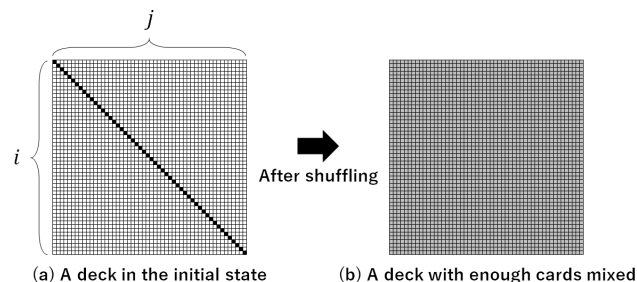


図2 デッキが十分に混ざっている状態
Fig. 2 The state of a deck with enough cards mixed.

図 2(b) の状態になる可能性はきわめて低い。

そこで本研究ではシミュレーション回数を $s \rightarrow \infty$ としたとき、

$$\forall p_{i,j} \in P_s, \lim_{s \rightarrow \infty} p_{i,j} = \frac{1}{n} \quad (10)$$

を満たす結果となる場合に理想的なシャッフルであると考ええる。たとえば、“ n 個の要素を持つ配列に対して乱数を与え、これらの要素を乱数の昇順に並べ替える”という手順が該当し、以下これをランダム・シャッフルと呼ぶ。

しかし現実には $s \rightarrow \infty$ とすることは不可能であるため、ランダム・シャッフルを使用してデッキをシャッフルしたとしても、式 (10) を満たすことはなく、

$$\exists p_{i,j} \in P_s, p_{i,j} = \frac{1}{n} \pm \text{error} \quad (11)$$

のように誤差が生じる。ここで式 (11) の error の部分に該当する、 $p_{i,j}$ の理想値 $1/n$ に対する誤差を

$$e_{i,j} = p_{i,j} - \frac{1}{n} \quad (12)$$

とおき、全体の $e_{i,j}$ を集合 E_s の要素として

$$E_s = \begin{pmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & e_{1,3} & \cdots & e_{1,n} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & e_{2,3} & \cdots & e_{2,n} \\ e_{3,1} & e_{3,2} & e_{3,3} & \cdots & e_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n,1} & e_{n,2} & e_{n,3} & \cdots & e_{n,n} \end{pmatrix} \quad (13)$$

のように n 次の正方行列として表す。たとえば先に示した例である場合、 $e_{1,3} \simeq 0.081$ となる。

3.2 手順 2：ビットマップ画像への変換

s セットのシャッフル結果から算出した $\forall e_{i,j} \in E_s$ を、青、白、赤のいずれかのビットに変換し、全体を $n \times n$ のビットマップ画像に変換する。ここでシャッフルによってカードが $i \rightarrow j$ に移動する頻度に関して、ビットマップ画像の各ビットは次のような意味を持つ。

- 青ビット：移動する頻度が小さい。
- 白ビット：移動する頻度がおおむね $1/n$ である。
- 赤ビット：移動する頻度が大きい。

また $e_{i,j}$ を各ビットに変換するルールは次のとおりとする。

$$e_{i,j} = \begin{cases} \text{青ビット} & (\text{if } e_{i,j} < -e_{max}) \\ \text{白ビット} & (\text{if } -e_{max} \leq e_{i,j} \leq e_{max}) \\ \text{赤ビット} & (\text{if } e_{max} < e_{i,j}) \end{cases} \quad (14)$$

ただし e_{max} は、ランダム・シャッフルにおける s セットのシャッフル結果から算出した E_s に対して、

$$\forall e_{i,j} \in E_s, -e_{max} \leq e_{i,j} \leq e_{max} \quad (15)$$

を満たす最小の値であるものとする。つまり

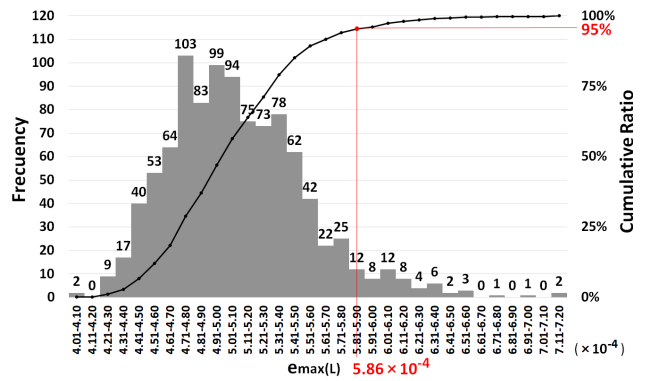


図 3 $e_{max(L)}$ の分布 (サンプル数: 1,000)

Fig. 3 The distribution of $e_{max(L)}s$ (samples: 1,000).

$$e_{max} = \max |e_{i,j}| \quad (16)$$

と表記できる。

しかし e_{max} の値はセット単位で変動するため、本研究では次の手順で算出した値を e_{max} に設定する。

- (1) ランダム・シャッフルにおける 10^6 セットのシャッフル結果から e_{max} を算出する。
- (2) (1) を 1,000 回繰り返して計 1,000 個の e_{max} を算出し、これらを $e_{max(L)}$, $L \in \{1, 2, \dots, 1,000\}$ とおく。
- (3) (2) の $e_{max(L)}$ を降順に並べ替え、上位 5% (50 個) の値を「外れ値」と見なし除外する。
- (4) (3) で残った $e_{max(L)}$ のうち、最も高い値を e_{max} に設定する。

このような手順において e_{max} を算出した結果、図 3 に示すように

$$e_{max} = 5.86 \times 10^{-4} \quad (17)$$

であることが分かった。

3.3 手順 3：シャッフルの収束率の計算

シャッフルのランダム性を評価するために、シャッフルの収束率 C を次式のように定義する。

$$C := \frac{w}{n^2} \quad (0.000 \leq C \leq 1.000) \quad (18)$$

ただし w はビットマップ画像における白ビットの総数を表す。また C は小数第四位以下で切り捨てを行い、 C に続けて括弧内に w を表記する。

たとえばビットマップ画像に白ビットが 1 つもなければ $C = 0.000(0)$ となり、シャッフルにランダム性がまったくないことを示している。一方、ビットマップ画像が白一色になれば $C = 1.000(2704)$ となり、ランダム・シャッフルと同等の高いランダム性があることを示している。

4. 数値例

本章では、ヒンズー・シャッフル、リフル・シャッフル、ディール・シャッフルに関して、単独のシャッフルにお

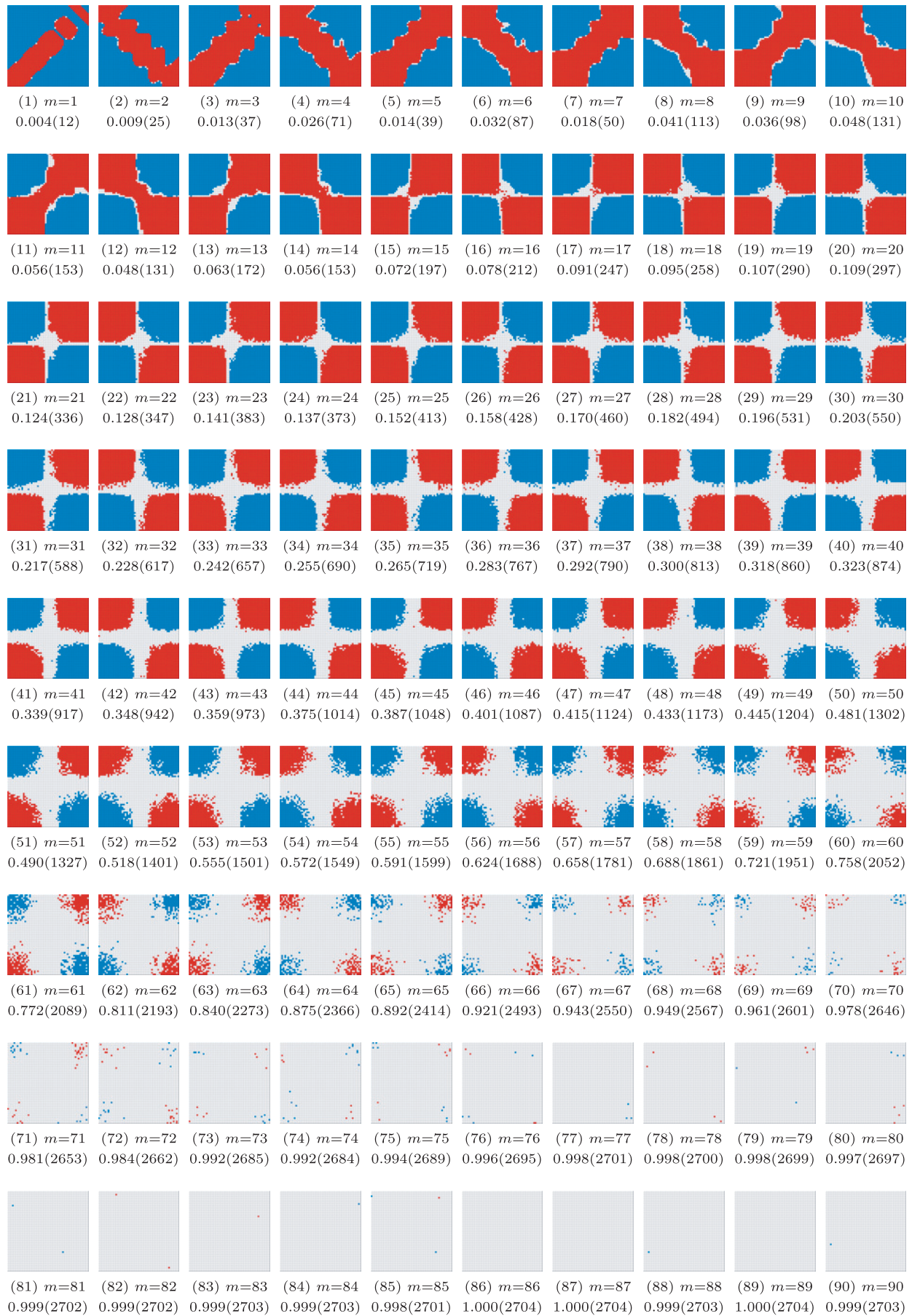


図 4 ヒンズー・シャッフルの結果 ($m = 1, 2, \dots, 90$)
 Fig. 4 A result of Hindu Shuffle ($m = 1, 2, \dots, 90$).

る最適なシャッフル回数と、複数のシャッフルにおける最適な組合せについて述べる。以下、すべての結果はセット数を $s = 10^6$ とした場合である。

4.1 ヒンズー・シャッフルを繰り返した場合

ヒンズー・シャッフルを繰り返した場合における、シャッフル回数 m とシャッフルの収束率 C との関係を図 4 に示す。図 4 では 1 つおきに類似したカードの分散傾向が示されており、左手で抜き出すパケットの位置が、シャッフル後にデッキの中心を対称に入れ替わるという性質が見て取れる。つまりシャッフル回数が奇数回であるときにはデッキの並びが逆順になりやすく、偶数回であるときには元の位置に戻りやすいことを意味している。

このような性質から m が初期の段階では、赤色の太いラインがビットマップ画像の対角線上に現れている。しかし $m \simeq 7$ からラインの中央部が徐々に細くなり、 $m \simeq 15$ で分裂を起こしている。その後、ビットマップ画像の四隅に青ビットと赤ビットが固まるようになるが、 m に比例して中央部から徐々に白ビットへと変化している。つまりデッキの中央部に位置するカードほど、全体に偏りなく移動しやすい傾向があることを意味している。

なお $m \simeq 50$ に差しかかると、これまでの C の伸び率と比較して約倍速で C が増加するようになる。その後は比較的早く白ビットが四隅に拡大していき、 $m = 86$ において $C = 1.000(2704)$ を満たした。このようにヒンズー・シャッフルだけでデッキをランダムな状態にするには、非常に多くの回数シャッフルを繰り返さなければならず、実用的ではないといえる。

4.2 リフル・シャッフルを繰り返した場合

リフル・シャッフルを繰り返した場合における、シャッフル回数 m とシャッフルの収束率 C との関係を図 5 に示す。図 5(1) の $m = 1$ では赤色のラインが 2 本示されており、2 つのパケットのカードがデッキ全体に分散して配置される性質が見て取れる。さらに図 5(2) の $m = 2$ では 3 本、図 5(3) の $m = 3$ では 4 本の赤色のラインが示されており、ラインの本数は 2^m で表されることが考えられる。このような性質から図 5(4) の $m = 4$ では 16 本のラインが現れるはずであるが、その多くのラインは消滅している。これと同時に $m = 3$ では $C = 0.071(193)$ と非常に低い結果であったが、 $m = 4$ では $C = 0.735(1989)$ まで急激に C が上昇していることが分かる。

これはビットマップ画像においてラインの密度が高くなることで、各ラインの傾きが徐々に水平に変化したことに起因すると考えられる。赤色のラインが水平になるということは、つまりすべての位置にカードが移動しやすくなるということの意味する。この結果、図 5(3)→図 5(4) のように多くのラインが消滅したと考えられる。

しかし $m = 4$ からは C の伸び率も緩やかになり、 $m \geq 6$ では C に大きな変化は現れなくなる。このように緩やかにではあるが、 m の増加にともない残っていたラインも消滅していき、 $m = 10$ で $C = 1.000(2704)$ となった。これらの結果から、リフル・シャッフルでは 10 回程度のシャッフルでデッキがランダムな状態になるといえる。またシャッフルのランダム性という観点からは、4 回目のシャッフルでカットオフ現象が発生していることが観測できた。

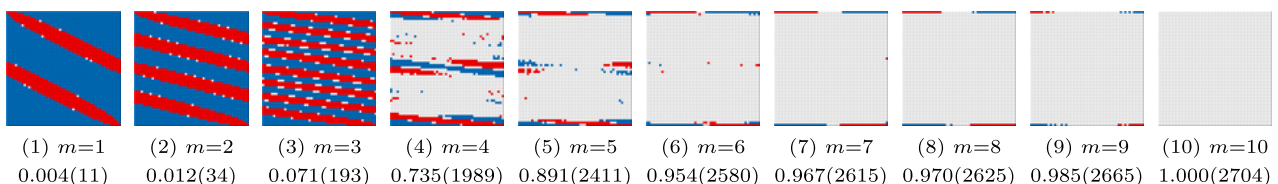


図 5 リフル・シャッフルの結果 ($m = 1, 2, \dots, 10$)
Fig. 5 A results of Riffle Shuffle ($m = 1, 2, \dots, 10$).

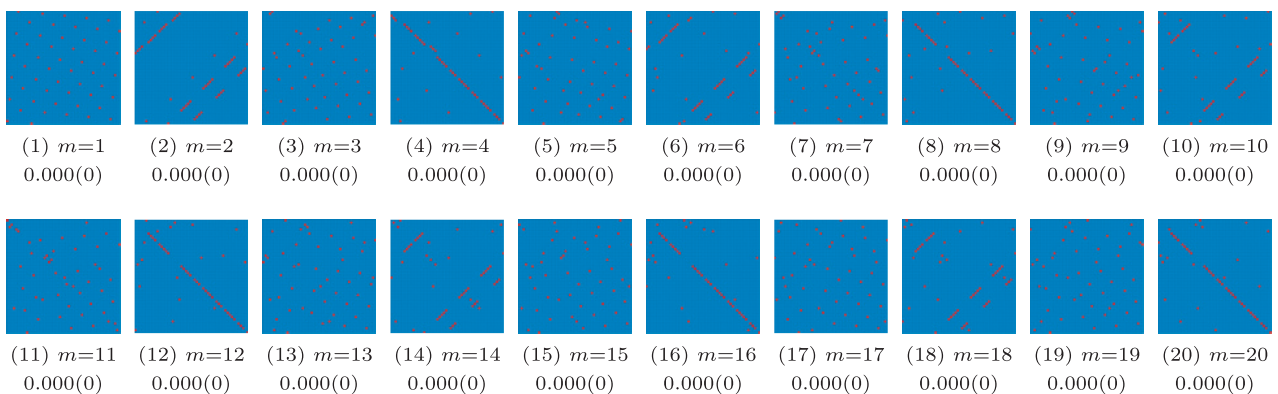


図 6 デール・シャッフルの結果 ($m = 1, 2, \dots, 20$)
Fig. 6 A result of Deal Shuffle ($m = 1, 2, \dots, 20$).

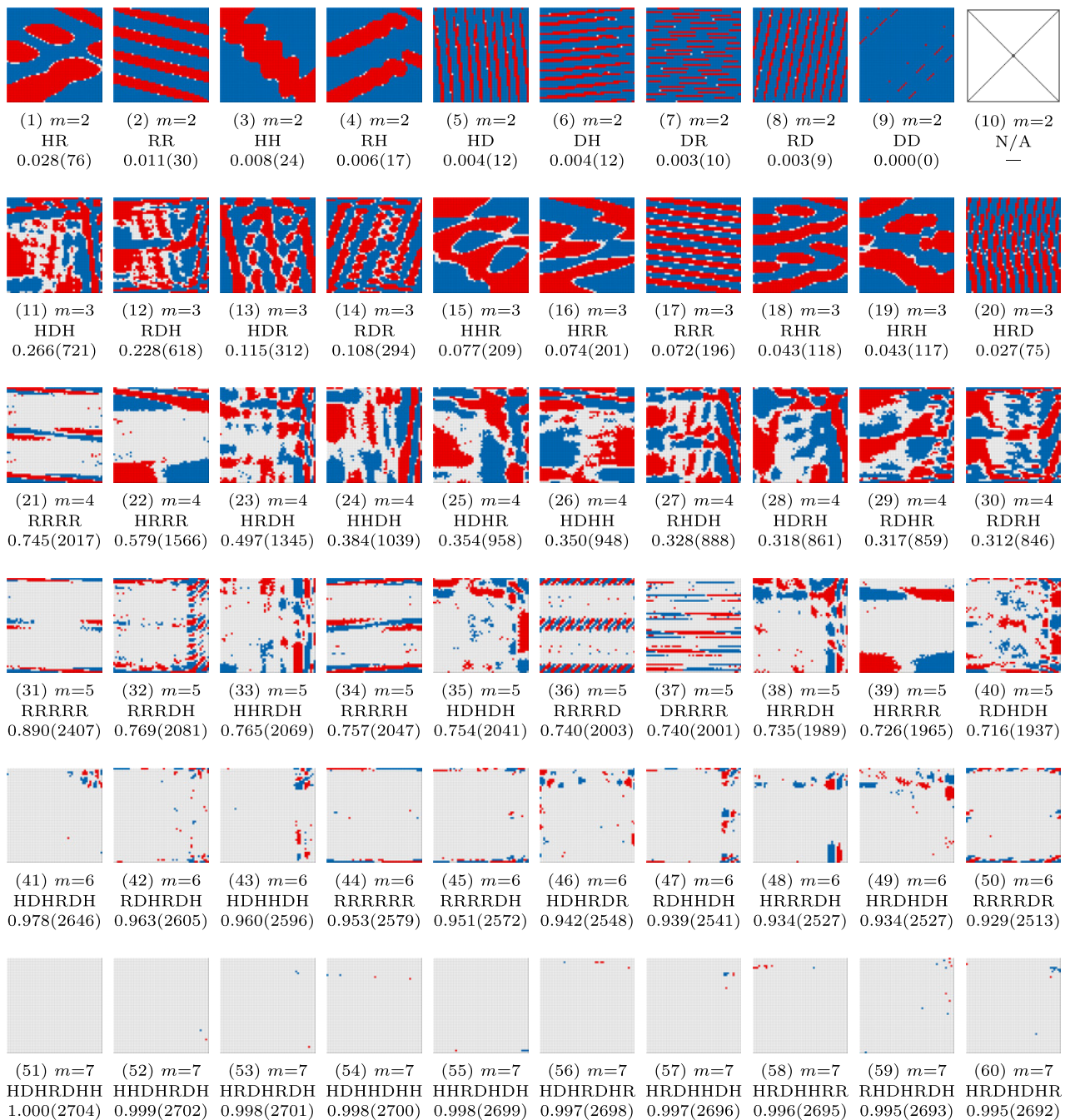


図 7 シャッフルを組み合わせた結果の上位 10 通り ($m = 2, 3, \dots, 7$)
 Fig. 7 The top 10 results of a combination of shuffles ($m = 2, 3, \dots, 7$).

4.3 ディール・シャッフルを繰り返した場合

ディール・シャッフルを繰り返した場合における、シャッフル回数 m とシャッフルの収束率 C との関係を図 6 に示す。図 6 を見るとすべての回数において $C = 0.000(0)$ となっており、シャッフル結果が一意的である (ランダム性がない) という性質が見て取れる。

また m の 3 つおきに類似したカードの分散傾向を示しているため、ディール・シャッフルを 5 回以上繰り返してもあまり意味がないことが分かる。特に m が 4 の倍数のとき、デッキの並びがおおむね元の状態に戻っていることが読み取れる。ただしこれらの結果はディール・シャッ

フルの手順によって支配されているため、手順の要素である $\{n, d, \text{パケットを重ね合わせる順序}\}$ によって結果が大きく変動することが考えられる。

このように単独のディール・シャッフルにはランダム性がないが、図 6(1) のようにカードをデッキ全体に分散できることが分かった (ただし結果は一意的である)。そのためディール・シャッフルを他のシャッフルと組み合わせることで、ランダム性の向上が期待できる。

4.4 複数のシャッフルを組み合わせた場合

複数のシャッフルを組み合わせた場合における、シャッ

表 1 $m = 7$ の上位 10 通りの組合せを 10^3 回繰り返した結果
 Table 1 A result of repeating the top 10 combinations of $m = 7$ for 10^3 times.

$m = 7$	2,704	2,703	2,702	2,701	2,700	2,699	2,698	2,697	2,696	2,695	2,694	2,693	2,692	$\leq 2,691$
(51) HDHRDHH	483	356	125	33	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(52) HHDHRDH	9	50	133	176	213	169	127	63	41	12	3	4	0	0
(53) HRDHRDH	7	45	138	178	198	190	119	82	26	13	2	2	0	0
(54) HDHHDHH	22	102	182	213	182	142	97	33	20	5	0	2	0	0
(55) HHRDHDH	0	1	5	17	39	92	141	165	194	135	104	50	36	21
(56) HDHRDHR	19	101	151	226	191	151	93	45	17	4	1	1	0	0
(57) HRDHHDH	0	0	1	14	64	154	241	210	163	84	38	23	5	3
(58) HRDHRRR	0	2	3	13	33	69	115	140	140	151	124	90	58	62
(59) RHDHRDH	0	1	2	2	5	17	30	57	101	140	150	115	131	249
(60) HRDHDHR	0	0	0	2	4	17	43	73	113	140	149	134	132	193

フル回数 m , シャッフルの組合せの順序 (H, R, D はそれぞれシャッフルの頭文字を表し, 左から右の順序でシャッフルすることを意味する), シャッフルの収束率 C との関係を示す。

- 図 7(1)–(9) : $m = 2$ の上位 9/9 通り
- 図 7(11)–(20) : $m = 3$ の上位 10/27 通り
- 図 7(21)–(30) : $m = 4$ の上位 10/81 通り
- 図 7(31)–(40) : $m = 5$ の上位 10/243 通り
- 図 7(41)–(50) : $m = 6$ の上位 10/729 通り
- 図 7(51)–(60) : $m = 7$ の上位 10/2,187 通り

つまり図 7 の最左列が, 各 m において最も良いシャッフルの組合せを示している。

まず $m = 2$ である図 7(1)–(9) において, 最も良い結果を示した組合せは HR であった。ただし $m = 2$ ではすべての組合せで非常に低い C となっているため, $m = 2$ ではシャッフルの効果は低いといえる。

次に $m = 3$ である図 7(11)–(20) において, 最も良い結果を示した組合せは HDH であり, その後に RDH, HDR, RDR と続いている。4.3 節で述べたとおり, ディール・シャッフルを繰り返すだけではシャッフル結果にランダム性は生じないが, このように他のシャッフルと挟み込むことで C が向上することが分かる。

次に $m = 4$ である図 7(21)–(30) において, 最も良い結果を示した組合せは RRRR であった。4.2 節で述べたとおり, リフル・シャッフルでは 4 回目のシャッフルでカットオフ現象が発生し, C が大幅に向上する。次点の HRRR の結果とも C の差が大きく開いているため, $m = 4$ ではシャッフルを組み合わせるよりも, リフル・シャッフルを繰り返した方が効率が良いといえる。

続いて $m = 5$ である図 7(31)–(40) においても, 最も良い結果を示した組合せは, リフル・シャッフルを繰り返した RRRRR であった。また次点の RRRDH の結果とも C の差が大きく開いているため, $m = 5$ でもリフル・シャッフルを繰り返した方が効率が良いといえる。

次に $m = 6$ である図 7(41)–(50) において, 最も良い結果

を示した組合せは HDHRDH であり, その後に RDHRDH, HDHHDH と続いている。これらの上位 3 通りの組合せは, $m = 3$ の上位 2 通りであった HDH, RDH の組合せであることが分かる。このように $m = 6$ では, リフル・シャッフルを繰り返すよりも, 複数のシャッフルを組み合わせの方が効率が良いといえる。

最後に $m = 7$ である図 7(51)–(60) において, 最も良い結果を示した組合せは HDHRDHH であり, ここで $C = 1.000(2704)$ を満たす結果となった。また $m = 7$ のいずれの組合せも, HDH, RDH を含んでいることが分かる。さらに $m = 7$ において, はじめて上位 10 通りにリフル・シャッフルの繰返しが見られなかった (RRRRRRR は 91/2,187 番目)。このように $m = 7$ においても, 複数のシャッフルを組み合わせの方が効率が良いといえる。

なお $m = 7$ において $C = 1.000(2704)$ を満たす組合せが出現したが, C にある程度の誤差が生じていることも事実である。そこで $m = 7$ の上位 10 通りの組合せである図 7(51)–(60) に対して, $s = 10^6$ のシミュレーションをさらに 10^3 回ずつ繰り返して, C のばらつきを調査した。この結果を表 1 に示す。表 1 の結果を比較すると, 図 7(51)–(60) の上位 10 通りの C にある程度の誤差が生じていることが分かる。しかし 10 通りのうち (51) HDHRDHH に関しては 48.3% という高い確率で $C = 1.000(2704)$ を満たしていることから, HDHRDHH が最も良い組合せであると考えられる。

5. おわりに

本研究では, シャッフル結果の可視化と定量化を行い, シャッフルの収束率を用いて最適なシャッフルの組合せについて分析した。その結果, 単独のシャッフルの場合ではリフル・シャッフルが最も効率が高く, シャッフルのランダム性という観点からは 4 回目のシャッフルでカットオフ現象が発生していることが分かった。また複数のシャッフルを組み合わせる場合には, シャッフル回数が m 回の場合において, 次の組合せが最適である (ランダム性が高い)

ことが分かった。

- $m = 2$: HR, $C = 0.028(76)$
- $m = 3$: HDH, $C = 0.266(721)$
- $m = 4$: RRRR, $C = 0.745(2017)$
- $m = 5$: RRRRR, $C = 0.890(2407)$
- $m = 6$: HDHRDH, $C = 0.978(2646)$
- $m = 7$: HDHRDHH, $C = 1.000(2704)$

しかしシャッフルの収束率 C が 1 に近いほどシャッフルが十分であるとはいえないケースが考えられる。たとえば 5 枚のカードが $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ の順に並んでおり、これらのカードがシャッフルによって $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5, 1\}$, $\{3, 4, 5, 1, 2\}$, $\{4, 5, 1, 2, 3\}$, $\{5, 1, 2, 3, 4\}$ へそれぞれ等確率で移動した場合、 $C = 1.000$ となり「理想的なシャッフル」の判定を受ける。ただしこのような並び順を巡回させたようなシャッフル結果になることは、確率的に起こりうるが非常に稀なケースであるため、実用的にはシャッフルの収束率 C による評価で十分であると考えられる。

このように本研究の評価指標であるシャッフルの収束率 C では、一部のシャッフル結果に対して正確な評価ができないこともあるため、シャッフルを多角的に評価するための評価指標の改善が今後の課題としてあげられる。

参考文献

- [1] 高木重朗：カードマジック辞典 新装版，東京堂出版 (2016)。
- [2] Aldous, D. and Diaconis, P.: Shuffling cards and stopping times, *American Mathematical Monthly*, Vol.93, No.5, pp.333–348 (1986)。
- [3] Diaconis, P.: Group representations in probability and statistics, *Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes – Monograph Series*, Vol.11 (1988)。
- [4] Diaconis, P.: The cutoff phenomenon in finite Markov chains, *Proc. National Academy of Sciences*, Vol.93, No.4, pp.1659–1664 (1996)。
- [5] Assaf, S., Diaconis, P. and Soundararajan, K.: Rifle shuffles of a deck with repeated cards, *The Annals of Probability (Institute of Mathematical Statistics)*, Vol.34, No.2, pp.804–819 (2006)。
- [6] Chen, G. and Saloff-Coste, L.: The cutoff phenomenon for randomized riffle shuffles, *Wiley Inter-Science*, pp.346–374 (2007)。
- [7] 野瀬彰大，深川大路：TCG におけるシャッフル手法に関する計算機実験を用いた考察，情報処理学会研究報告ゲーム情報学，Vol.2011-GI-25, No.4, pp.1–8 (2011)。
- [8] Kolata, G.: In Shuffling Cards, 7 Is Winning Number, *The New York Times* (Jan. 9, 1990), available from <http://www.nytimes.com/1990/01/09/science/in-shuffling-cards-7-is-winning-number.html> (accessed 2018-02-28)。
- [9] 洞 彰人：ランダムウォークのカットオフ現象，数理研講究録，Vol.1017, pp.70–91 (1997)。
- [10] Gilbert, E.: Theory of shuffling, *Technical memorandum*, Bell Laboratories (1955)。
- [11] KONAMI：シャッフルとランダム化，WORLD OF WAR-CRAFT ©TCG 公式大会のルール，入手先 (<http://www.konami.jp/card/wowtcg/about.html>) (参照 2018-02-28)。

推薦文

テーマの着眼点が非常にユニークであり、論旨に対する評価実験も適切に行われていた。論文の構成もしっかりしており推薦に値する。

(FIT2017 第 16 回情報科学技術フォーラム

プログラム委員長 斎藤英雄)



井手 広康 (正会員)

修士 (情報科学)。2009 年鳴門教育大学学校教育学部学校教育教員養成課程卒業。2009 年～現在、愛知県立衣台高等学校教諭 (情報)。2014～2016 年愛知県立大学客員共同研究員。2018 年愛知県立大学大学院情報科学研究科情報システム専攻博士前期課程修了。現在、同大学院情報科学研究科情報科学専攻博士後期課程に在学。情報教育やゲーム情報学に関する研究に従事。日本情報科教育学会、日本産業技術教育学会各会員。



奥田 隆史 (正会員)

1985 年豊橋技術科学大学情報工学課程卒業。1987 年同大学大学院修士課程修了。1987 年よりセイノー情報サービス (株) において VAN に関する研究に従事。1988 年より豊橋技術科学大学 (情報工学系・教務職員、助手) において通信システムの設計・制御法に関する研究に従事。1993 年朝日大学経営学部講師，1996 年助教授，1997 年愛知県立大学情報科学部地域情報科学科助教授・准教授を経て，2008 年より同大学情報科学部情報科学科教授。現在は，情報通信システムの性能評価・信頼性，ネットワークロボットに関する教育研究に従事。この間，1994～1995 年 Weber State University で客員助教授，2002～2003 年 Duke University で客員研究員。工学博士 (豊橋技術科学大学，1992 年 9 月)。計測自動制御学会，電子情報通信学会，IEEE，日本教育工学会，経営情報学会，日本オペレーションズ・リサーチ学会，電気学会各会員。