

# 手札公開ババ抜きについて

木谷 裕紀<sup>1,a)</sup> 小野 廣隆<sup>1,b)</sup>

**概要:** 全国的に認知度、人気が高いトランプカードゲームの一つであるババ抜きは不完全情報ゲームであり、心理的な駆け引きを除けば戦略性よりも偶然性が支配するゲームである。本研究では手札公開で行う完全情報の「ババ抜き」ゲームを定義し、その最適戦略について考察する。プレイヤーが3人の場合における必勝戦略の有無に関する必要十分条件を与える。さらに、プレイヤー4人以上のときすべてのプレイヤーが最善をつくすと「千日手」が発生して引き分けとなる局面が存在することを示す。

## An open-hand variant of BABANUKI

KIYA HIRONORI<sup>1,a)</sup> ONO HIROTAKA<sup>1,b)</sup>

**Abstract:** BABANUKI, also known as Old Maid, is a major and popular playing card game in Japan. It is an imperfect information game, and fortuity is more essential than strategies except psychological ones. In this paper, we newly introduce “open BABANUKI”, where players play BABANUKI with cards faced up. This makes the game a perfect information game, and it becomes worth considering optimal strategies. We give a necessary and sufficient condition of the existence of the winning strategy for three players’ case. Furthermore, for four or more players’ case, we discover that there is a configuration where an endless-loop phenomenon, so-called “SENNICHITE”, occurs.

### 1. はじめに

「ババ抜き」はそのルールの単純さと分かり易さから全国的に認知度、人気が高いトランプカードゲームである。このゲームは「ジジ抜き」などの亜種があるほか、海外の類似した遊びとして「Old Maid」などがあり、いずれも老若男女問わず遊ばれている。これらのゲームは七並べや大貧民と同じようにゲームの開始から配られた手札を減らしていき、手札を早くなくすことを競う手札消費型ゲームである。また、自分の手札と場に出された札以外知ることができない不完全情報ゲームであり、最適戦略は存在しない。近年、将棋やオセロなどの完全情報ゲームに関する研究と共に、大貧民などの不完全情報ゲームの研究も進んでいる [2]。しかし、これらのゲームのプレイ戦略に関する研究はいくつか存在する一方で、ババ抜きはその単純さや選択肢の少な

さからプレイ戦略に関する研究は知られてない。本研究では手札を全て公開にして行うというルールに変更したトランプゲーム「ババ抜き」を「手札公開ババ抜き」として定義しその最適戦略について考察する。

本稿ではまず、手札公開ババ抜きを定義し、その後この2人ゲームの必勝戦略について述べる。その後、3人ゲーム、4人ゲームの場合の必勝戦略の存在性について示す。また、その中で特に4人ゲームについては千日手局面が発生することを示す。

### 2. 準備

まず、ババ抜きを以下のようにモデル化する。ババ抜きはゲームの進行の際「ペアカード」のみ手札から捨てることが許されている。このペアカードは通常のパバ抜きでは2枚1ペア、もしくは4枚2ペアで行われているが本論文では2枚1組としこのペアの数を  $n$  とする。また、ババ抜きにおいては「ババ」と呼ばれるカード（多くの場合「JOKER」札にその役割を与える）があり、この札はペアを持たない札で手札から捨てることができない。この札を1枚とする。

<sup>1</sup> 名古屋大学大学院情報学研究科 数理情報学専攻  
Department of Mathematical Informatics, Graduate School of Informatics, Nagoya University

a) kiya.hironori@gmail.com

b) ono@i.nagoya-u.ac.jp

以下ではこのペア  $n$  組, 「ババ」札として JOKER 札 1 枚の手札総数  $2n + 1$  枚からなる手札公開ババ抜きをモデル化する。

各プレイヤーを  $\{P_0, P_1, \dots, P_p\}$  ( $p$  は 2 以上の整数) とする。また, 通常札を  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  とし,  $2i - 1$  と  $2i$  は互いにペアとする ( $i = 1, 2, \dots, n$ )。ペア同士の札をペア札と呼ぶ。また JOKER 札を  $\{j\}$  とする。また各プレイヤーの手札集合を  $\{1, 2, \dots, 2n\} \cup \{j\}$  の部分集合の形で与える。プレイヤーに配布された札 (手札と呼ぶ) の数は必ずしも等しくなくてよい。またプレイヤーに順番が来ている状態のことをそのプレイヤーが手番であると表現し, 手番であるプレイヤーを手番プレイヤーと呼ぶ。この設定の下, 以下の形でゲームを進める。

- 適当な方法で札を配り, 手札にペアの札が存在するときそのペア札を 2 枚とも場に出す。これを手札にペアの札がなくなるまで繰り返す。以降ゲーム中に手札にペア札が現れるたびにそのペア札を, 出していく。
- 手札がすべてなくなった場合そのプレイヤーはゲームから離脱する。
- 循環する順番をきめ, 初期手番プレイヤーを決める。その後, 初期手番プレイヤーは最終手番のプレイヤーの手札から 1 枚任意の札を選んでその札を手札に加える。
- 以降の手番のプレイヤーは直前の手番プレイヤーから手札を 1 枚選び手札に加える。なお, 直前のプレイヤーが既にゲームに存在しないとき, その 1 つ前の手番プレイヤーの手札から 1 枚選び手札に加える。
- 最初にすべての手札をなくしたプレイヤーから上位の順位をつけていき, 最後まで手札が残っていたプレイヤーが最下位となる。

続いて勝敗の定義を行う。ババ抜きには上がり方が二種類存在する。いずれも該当プレイヤーの手札が残り 1 枚のときに発生し, 自分が既に持っている手札と同じ値の札を引いて場に出して上がる場合と自分が持っている手札がひかれることによって上がる場合である。前者を引き上がり, 後者を渡し上がりと定義する。また引き上がりと渡し上がりが 1 つの札を引いたときに起こる場合渡し上がりのプレイヤーにより上位をつける。このルールの下, ババ抜きを行う。以降では完全情報確定ゲームとしてババ抜きを行う。このババ抜きを「手札公開ババ抜き」とし, このゲームにおいてすべてのプレイヤーの所持札, 所持位置が分かると仮定する。

### 3. 二人手札公開ババ抜き

二人で行う手札公開ババ抜きにおいて以下が成立する。

**定理 1.** 二人プレイヤーで行う手札公開ババ抜きにおいて JOKER 札を持っていないプレイヤーは必勝戦略を持つ。また, その戦略は「JOKER 札以外のいずれかを選んで引く」である。

**証明.** JOKER 札を持っているプレイヤーが引き上がりと渡し上がりその両方できないことを示す。JOKER 札は 2 枚ないので引き上がりはできない。また渡し上がりできると仮定すると JOKER 札 1 枚以外手札がない状態から JOKER 札を渡し勝利することになるがこのとき, ゲームが続いているので相手プレイヤーは何かしらのカードを手札に持っていなければいけない (持っていなければ相手プレイヤーは既に勝利している)。したがってそのペアカードは JOKER 札を持っているプレイヤーが持っていることになるがこれは手札が JOKER 札しかないという仮定より矛盾。したがって JOKER 札を持っているプレイヤーが引き上がり, 渡し上がりどちらもできない。したがって二人プレイヤーの手札公開ババ抜きにおいて JOKER 札を持っていないプレイヤーは必勝戦略を持つ。また, その戦略は「JOKER 札以外のいずれかを選んで引く」である。□

### 4. 三人手札公開ババ抜き

三人プレイヤーの手札公開ババ抜きにおいて手番プレイヤーに対して JOKER 札を持っているプレイヤーがどの手番順序にあるかによって必勝戦略が定まることを示した。以下ではまず各変数を定義する。プレイヤーの順番を  $P_0, P_1, P_2, P_0, \dots$  とする。以下ではプレイヤー  $P_i$  の番号  $i$  は 3 による剰余つまり  $i \bmod 3$  を表すものとする。プレイヤー  $P_i$  とプレイヤー  $P_{i+1}$  が共に持つ手札の集合を  $X_i$ , プレイヤ  $i$  とプレイヤー  $P_{i+2}$  が共に持つ手札の集合を  $Y_i$ , プレイヤ  $P_{i+1}$  とプレイヤー  $P_{i+2}$  が共に持つ手札の集合を  $Z_i$  とする。つまり  $X_0 (= Y_1 = Z_2)$  は  $P_0$  と  $P_1$  が共に持つ手札の集合であり, 同様に,  $X_1 (= Y_2 = Z_0)$  は  $P_1$  と  $P_2$  が,  $X_2 (= Y_0 = Z_1)$  は  $P_2$  と  $P_0$  が共に持つ手札集合である ( $Y_i, Z_i$  の定義は冗長であるが, 後の証明の簡易化のために導入している)。また, プレイヤ  $P_i$  ( $i=0,1,2$ ) が JOKER 札を持っているとき  $j_i = 1$ , 持っていないとき  $j_i = 0$  とする。手札公開ババ抜きにおいては 2 枚 1 ペアでゲームが進み, ペアカードがそろった時点で手札は捨てられるため, JOKER 札を除くと, 1 プレイヤのみが 1 持つ手札及び 3 プレイヤが持つ手札は存在しない。従って, 各プレイヤーの手札集合を  $H_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) とすると,  $P_i$  が JOKER 札を持っているときは  $H_i = X_i \cup Y_i \cup \{j\}$ ,  $P_i$  が JOKER 札を持っていないときは  $H_i = X_i \cup Y_i$  となる。

手番プレイヤーと JOKER 札を持つプレイヤー (JOKER プレイヤ) の位置関係によって必勝プレイヤーの有無が変化する。手番プレイヤーと JOKER プレイヤの位置関係は

- (I) 手番プレイヤーと JOKER プレイヤが異なり, 手番プレイヤーの次に JOKER プレイヤがプレイする順のとき
- (II) 手番プレイヤーと JOKER プレイヤが異なり, 手番プレイヤーは JOKER プレイヤから札を引く順のとき
- (III) 手番プレイヤーと JOKER プレイヤが同一のとき

の3通りがある。このそれぞれの場合における必勝戦略とその保持者を決定する定理を示すことができる。

まず、(I) の状況における必勝戦略保持者は次の定理のように特徴付けがされる。

**定理 2.** 手番プレイヤーが  $P_0$  であり、 $P_1$  が JOKER 札を持っているとする。このとき  $P_0$  が必勝戦略を持つのは以下の場合のみである。

- $|X_0| = 1, |Y_0|$  が奇数,  $|Z_0| > 0$ .
- $|X_0| = 0, |Y_0|$  が 2 以上の偶数,  $|Z_0| = 0$
- $|X_0| = 0, |Z_0| > 0$

$P_1$  が必勝戦略を持つのは以下の場合のみである。

- $|X_0|$  が奇数,  $|Y_0| > 1, |Z_0| = 0$

$P_2$  が必勝戦略を持つのは以下の場合のみである。

- $|X_0| > 0, |Y_0| = 0$
- $|Y_0| = 1, |Z_0| = 0$
- $|X_0|$  が偶数,  $|Y_0|$  が奇数,  $|Z_0|$  が偶数,  $|X_0| \geq |Z_0|$
- $|X_0|$  が奇数,  $|Y_0|$  が偶数,  $|Z_0|$  が奇数,  $|X_0| \geq |Z_0|$

(I) の条件において、定理の条件に合わない場合、どのプレイヤーも必勝戦略を持たないことに注意されたい。このことは、ゲームを通してどのプレイヤーも必勝戦略を保持しないことを意味するわけではなく、各手番の決定により、(未来の) 必勝戦略を保持するプレイヤーが変化しうることを意味している。

例えば手番プレイヤーである  $P_0$  がある札を引けば次の局面において  $P_1$  が必勝戦略を持つ状況になるが、別の札を引けば  $P_2$  が必勝戦略を持つ状況になるなどの事態が存在する。あるいは、 $P_0$  がどの札を引いたとしても、その時点では依然として必勝戦略保持者が定まらないこともある。

以上から (I) だけでなく (II), (III) における必勝戦略保持者の特徴付けを行う定理はそれぞれ (I) とは別に示す必要がある。(II), (III) に対応する特徴付けはそれぞれ以下の通りである。

**定理 3.** 手番プレイヤーが  $P_0$  であり、 $P_0$  が JOKER 札を持っているとする。このとき、 $P_0$  が必勝戦略を持つのは以下の場合のみである。

- $|X_0| = 0, |Y_0|$  が奇数,  $|Z_0| > 0$

$P_1$  が必勝戦略を持つのは以下の場合のみである。

- $|Y_0| > 1, |Z_0| = 0,$
- $|X_0| = 1, |Z_0| = 1,$
- $|X_0|, |Y_0|, |Z_0|$  が全て奇数,  $|X_0| \leq |Y_0|,$
- $|X_0|, |Y_0|, |Z_0|$  が全て偶数,  $|X_0| \leq |Y_0|.$

$P_2$  が必勝戦略を持つのは以下の場合のみである。

- $|X_0| > 0, |Y_0| = 0,$
- $|X_0| > 0, |Y_0| = 1, |Z_0|$  が偶数,
- $|X_0| = 0, |Y_0| = 0, |Z_0|$  が奇数.

**定理 4.** 手番プレイヤーが  $P_0$  であり、 $P_2$  が JOKER 札を持っているとする。このとき  $P_0$  が必勝戦略を持つのは以下の

場合のみである。

- $|X_0| = 0, |Z_0| > 0,$
- $|X_0| = 1, |Y_0| = 1, |Z_0| > 0$
- $|X_0|$  が奇数,  $|Y_0|$  が奇数,  $|Z_0|$  が偶数,  $|Y_0| \leq |Z_0|,$
- $|X_0|$  が偶数,  $|Y_0|$  が偶数,  $|Z_0|$  が奇数,  $|Y_0| \leq |Z_0|.$

$P_1$  が必勝戦略を持つのは以下の場合のみである。

- $|Y_0| > 1, |Z_0| = 0,$
- $|X_0|$  が偶数,  $|Y_0| > 0, |Z_0| = 0,$
- $|X_0|$  が奇数,  $|Y_0| > 1, |Z_0| = 1,$

$P_2$  が必勝戦略を持つのは以下の場合のみである。

- $|X_0| > 0, |Y_0| = 0, |Z_0|$  が偶数.

尚、本定理においては既に手札が 0 枚のプレイヤーは必勝戦略を持つ (既に勝利している) としているが、これは明らかであるため、その場合の証明は本稿では省略する。

本稿では (I) の状況に対応する定理 2 の証明を中心に説明する。まず定理 2 の状況にあてはまる  $|X_0| > 1, |Y_0| = 0, |Z_0| = m$  が成立するとき、 $P_2$  が必勝戦略を持つことを補題 1 として示す。

**補題 1.**  $m$  を非負整数とする。手番プレイヤーが  $P_0$  のとき、2 人プレイヤー手札公開ババ抜きにおいて以下が成立する。

(i)  $|X_0| = m + 1, |Y_0| > 1, |Z_0| = 0, j_0 = 1$  のとき  $P_1$  は必勝戦略を持つ。

(ii)  $|X_0| > 0, |Y_0| = 0, |Z_0| = m, j_1 = 1$  のとき  $P_2$  は必勝戦略を持つ。

(iii)  $|X_0| = 0, |Y_0| = m, |Z_0| > 0, j_2 = 1$  のとき  $P_0$  は必勝戦略を持つ。

**証明.**  $m$  に関する数学的帰納法によって示す。

基礎ステップとして、(ii) における  $m=1$  の場合、すなわち  $|X_0| > 0, |Y_0| = 0, |Z_0| = 1, j_1 = 1$  のときに  $P_2$  が必勝であることを示す。このとき  $P_2$  の手札は  $H_2 = X_2 \cup Y_2 = Y_0 \cup Z_0$  より  $Z_0$  に属する一枚のみであるため、 $P_0$  は  $|Z_0|$  に属する札以外引くことのできる手札がない。また  $|X_0| > 0$  より、 $P_0, P_1$  は手札を一枚以上持っているため  $P_0$  へ渡し上がりすることによって  $P_2$  必勝である。

次に (ii) の帰納ステップとして  $|X_0| > 1, |Y_0| = 0, |Z_0| = k, j_1 = 1$  のとき  $P_2$  は必勝戦略を持つと仮定する。このとき  $P_0$  の手番において以下が成立することを示す。

(i)'  $|X_0| = k + 1, |Y_0| > 1, |Z_0| = 0, j_0 = 1$  のとき  $P_1$  は必勝戦略を持つ。

(ii)'  $|X_0| > 0, |Y_0| = 0, |Z_0| = k + 1, j_1 = 1$  のとき  $P_2$  は必勝戦略を持つ。

(iii)'  $|X_0| = 0, |Y_0| = k + 1, |Z_0| > 0, j_2 = 1$  のとき  $P_0$  は必勝戦略を持つ。

まず、(iii)'  $|X_0| = 0, |Y_0| = k + 1, |Z_1| > 0, j_2 = 1$  のときについて示す。この盤面から  $P_0$  は  $Y$  に属する札を引くことによってその直後の盤面は手番プレイヤーが  $P_1$  となり、 $|X_1| > 0, |Y_1| = 0, |Z_1| = k, j_2 = 1$  が成立する。仮定より、

$|X_0| > 0, |Y_0| = 0, |Z_0| = k, j_1 = 1$  のとき  $P_2$  は必勝戦略を持つため、手番プレイヤーが  $P_1$  であり、 $|X_1| > 0, |Y_1| = 0, |Z_1| = 2k + 1, j_2 = 1$  が成立する盤面は  $P_0$  必勝である。従って  $|X_0| = 0, |Y_0| = k + 1, |Z_0| > 0, j_2 = 1$  のとき  $P_0$  は必勝戦略を持つ。

次に、(i)  $|X_0| = k + 1, |Y_0| > 1, |Z_0| = 0, j_0 = 1$  のときについて示すこの盤面から、 $P_0$  は  $Y$  に属する札以外引くことができない。このときその直後の  $P_1$  の手番において  $|X_1| = 0, |Y_1| = k + 1, |Z_1| > 0, j_0 = 1$  が成立する。上記より、 $|X_0| = 0, |Y_0| = k + 1, |Z_0| > 0, j_2 = 1$  のとき  $P_0$  は必勝戦略を持つため、 $|X_1| = 0, |Y_1| = k + 1, |Z_1| > 0, j_0 = 1$  が成立する盤面は  $P_1$  必勝である。したがって  $|X_0| = k + 1, |Y_0| > 1, |Z_0| = 0, j_0 = 1$  のとき  $P_1$  は必勝戦略を持つ。

最後に (ii)  $|X_0| > 0, |Y_0| = 0, |Z_0| = k + 1, j_1 = 1$  のときについて示す。この盤面から  $P_0$  は  $Z$  に属する札以外引くことができない。このときその直後の  $P_1$  の手番において  $|X_1| = k + 1, |Y_1| > 1, |Z_1| = 0, j_1 = 1$  が成立する。上記より、 $|X_0| = k + 1, |Y_0| > 1, |Z_0| = 0, j_0 = 1$  のとき  $P_1$  は必勝戦略を持つため、 $|X_1| = k + 1, |Y_1| > 1, |Z_1| = 0, j_1 = 1$  が成立する盤面は  $P_2$  必勝である。従って  $|X_0| > 0, |Y_0| = 0, |Z_0| = k + 1, j_1 = 1$  のとき  $P_2$  は必勝戦略を持つ。

よって帰納法より題意は示された。□

また、定理 2、定理 3 の条件のうち、これ以外の場合をまとめたものが次の補題 2 である。これらも同様に帰納法で示すことができる。

**補題 2.** 手番プレイヤーが  $P_0$  であり、 $P_1$  が JOKER 札を持っているとする。このとき以下の場合  $P_0$  が必勝戦略を持つ。

- $|X_0| = 1, |Y_0|$  が奇数,  $|Z_0| > 0$ .
- $|X_0| = 0, |Y_0|$  が偶数,  $|Z_0| = 0$
- $|X_0| = 0, |Z_0| > 0$

以下の場合  $P_1$  が必勝戦略を持つ。

- $|X_0|$  が奇数,  $|Y_0| > 1, |Z_0| = 0$

以下の場合  $P_2$  が必勝戦略を持つ。

- $|Y_0| = 1, |Z_0| = 0$
- $|X_0|$  が 2 以上の偶数,  $|Y_0|$  が奇数,  $|Z_0|$  が偶数,  $|X_0| \geq |Z_0|$
- $|X_0|$  が奇数,  $|Y_0|$  が偶数,  $|Z_0|$  が奇数,  $|X_0| \geq |Z_0|$

また、手番プレイヤーが  $P_0$  であり、 $P_0$  が JOKER 札を持っているとする。このとき、以下の場合  $P_0$  が必勝戦略を持つ。

- $|X_0| = 0, |Y_0| = 2m + 1, |Z_0| > 0$

以下の場合  $P_1$  が必勝戦略を持つ。

- $|Y_0| > 1, |Z_0| = 0,$
- $|X_0| = 1, |Z_0| = 1,$
- $|X_0|, |Y_0|, |Z_0|$  が全て奇数,  $|X_0| \leq |Y_0|,$
- $|X_0|, |Y_0|, |Z_0|$  が全て偶数,  $|X_0| \leq |Y_0|.$

以下の場合  $P_2$  が必勝戦略を持つ。

- $|X_0| > 0, |Y_0| = 0,$

- $|X_0| > 0, |Y_0| = 1, |Z_0|$  が偶数,
- $|X_0| = 0, |Y_0| = 0, |Z_0|$  が奇数.

これらの補題によって、必勝戦略を保持する条件を示すことができる。ここで定理 2 の記述が「(各プレイヤーが) 必勝戦略を持つのは以下の場合のみである。」となっていることに注意されたい。すなわち、定理 2 で列挙された条件を満たさない場合、例えば、手番プレイヤーが  $P_0$  で  $P_1$  が JOKER 札を持っているとき、 $|X_0|$  が 2 以上の偶数、 $|Y_0| = 1, |Z_0| = 1$  であるような状況は定理 2 のいずれにも当てはまらない。

このような場合はいずれのプレイヤーも必勝戦略を保持しないことを定理 2 は示している。上述の状況での必勝戦略保持者の不在性を次の補題 3 で示す。

**補題 3.** 手番プレイヤーが  $P_0$  のとき、 $|X_0|$  が 2 以上の偶数、 $|Y_0| = 1, |Z_0| = 1, j_1 = 1$  のとき、どのプレイヤーも必勝戦略を持たない。

**証明.**  $P_0$  が初手で  $Z$  に属する札を引くと  $P_1$  が、 $P_0$  が初手で  $Y$  に属する札を引くと  $P_2$  が必勝戦略を持つことを示す。 $P_0$  が初手で  $Z$  に属する札を引くと、 $|X_0| = |Y_1|$  が奇数、 $|Y_0| = |Z_1| = 1, |Z_0| = |X_1| = 0, j_1 = 1$  を満たす。補題 2 より、この局面は  $P_1$  必勝局面なので、 $P_0$  が初手で  $Z$  に属する札を引くと  $P_1$  が必勝戦略を持つ。 $P_0$  が初手で  $Z$  に属する札を引くと、 $|X_0| = |Y_1|$  が偶数 (2 以上)、 $|Y_0| = |Z_1| = 0, |Z_0| = |X_1| = 1, j_1 = 1$  を満たす。補題 2 より、この局面は  $P_2$  必勝局面なので、 $P_0$  が初手で  $Y$  に属する札を引くと  $P_1$  が必勝戦略を持つ。従って  $P_0$  の初手によって、必勝戦略保持者が  $P_1, P_2$  のいずれになるか決まってしまうため、どのプレイヤーも必勝戦略を持たない。□

定理 2 の記述は  $|X_0|$  に関しては 0, 1, あるいは偶奇、 $|Y_0|$  に関しては 0, 1, 2 以上, あるいは偶奇、 $|Z_0|$  に関しては 0, 1 以上, あるいは偶奇, による分類である。これらから、定理 2 の条件に当てはまらない状況を列挙し、補題 3 と同様に必勝戦略保持者の不在性を示すことによる分類である。以上が定理 2 の証明の概略である。

## 5. 四人以上で行う手札公開ババ抜きと千日手

本節では四人プレイヤーで行う手札公開ババ抜きにおいて千日手局面が存在することを示す。千日手とはもともと将棋の用語で同一局面に 4 回突入すると引き分け (連続王手である場合を除く) になるルールであり、似たルールとしてチェスにおけるスリーフォールドレピティション (Threefold repetition) がある。以下では同一局面に複数回突入すると引き分けになるルールとする。部分ゲームにおいて最適戦略が千日手となるゲームは「シンペイ」や「BAO」, 「アンパンマンはじめてしょうぎ」などが知られている [1], [3], [4]。本研究では、四人プレイヤーの手札公開バ

バ抜きにおける千日手局面について考察する.

**定理 5.** 四人以上のプレイヤーで行う手札公開バ抜きにおいて全てのプレイヤーが最下位を避け 1 位を目指すとき, 局面が千日手局面となる局面が存在する.

また, その局面の一例を示す.

**補題 4.** プレイヤ  $P_1, P_2, P_3, P_4$  の順でゲームが進行し次の手番は A とする. このとき各プレイヤーが順位をよりよくするための最善行動をとるとすると以下の手札配置のとき千日手となる.

- プレイヤ  $P_1$  と  $P_3$  は同一手札であり, その枚数は 2 枚とする.
- プレイヤ  $P_2$  の手札は 2 枚であり, プレイヤ  $P_4$  の手札は 3 枚である.

**証明.** プレイヤ  $P_1$  が JOKER 札を引く手が最適戦略であれば対称性よりこの局面は千日手になることが分かる. したがって JOKER 札以外を引く手を行った場合順位が悪くなる (最下位になる) ことを以下では示す. プレイヤ  $P_1$  が JOKER 札以外を引くと仮定する. プレイヤ  $P_2$  はその札を引くことによって残り 1 枚となり, その 1 枚をプレイヤ  $P_3$  に渡すことによって渡し上がりで必ず 1 番最初に上がることができる. その後プレイヤ  $P_4$  はプレイヤ  $P_3$  が受け取った 1 枚を引くことによって残りが JOKER 札 1 枚となりその 1 枚をプレイヤ  $P_0$  に渡すことで残り 3 人の中で一番に上がることができる. この時点で残りプレイヤーは二人なので定理 1 より JOKER 札を持っていないプレイヤー  $P_3$  はこの時点で JOKER 札以外を選ぶことによって勝利することができる. したがってプレイヤー A は JOKER 札以外を引く手は他のプレイヤーが自己順位を最小化する戦略をとることによって必ず最下位となる.

以上より JOKER 札以外を引く手を行うと最下位になってしまう.

したがってこの手札配置のとき各プレイヤーは JOKER 札を引く手が最適戦略であり, 千日手局面である.  $\square$

#### 参考文献

- [1] 稲畑 康博, 高橋 和子. ボードゲーム BAO における周期性の解析とモデルチェッカによる検証ゲームプログラミングワークショップ 2004 論文集 vol.2004, pp.151-158, 2004-11-12
- [2] 大渡 勝己. 大貧民の空場におけるパスの有効性の検証. 研究報告ゲーム情報学 (GI) 2017-GI-37 巻, 11 号, pp.1-8
- [3] 塩田 好, 石水 隆, 山本 博史. 「アンパンマンはじめてしようぎ」の完全解析. 2013 年度 情報処理学会関西支部 支部大会 講演論文集 2013-09-18
- [4] 田中 哲朗. ボードゲーム「シンペイ」の完全解析. 情報処理学会論文誌 48 巻 11 号, pp3470 - 3476