

"Mathematical Analysis on Affine Maps for 2D Shape Interpolation"の実装報告

松藤 ちひろ^{a)}

概要：筆者は S.Kaji らが 2012 年に発表した論文 "Mathematical Analysis on Affine Maps for 2D Shape Interpolation" [1] の実装を試みている。この論文では 2000 年に Alexa らが提案した変形行列を用いた ARAP と呼ばれるモーフィング手法に改良を加えた二次元モデルに対する補間手法を提案している。一方三次元モデルに対するモーフィング手法も 2016 年に S.Kaji によって提案されている ("TETRISATION OF TRIANGULAR MESHES AND ITS APPLICATION IN SHAPE BLENDING" [2])。筆者はこの二つの論文を元に Mathematica での実装を行い変形の実験を行い様々な手法の特徴を考察した。さらに、M.Muller らによって提案された Shape Matching ("Meshless Deformations Based on Shape Matching" [3]) を組み合わせたモーフィングの実装を行い、拡張性のあるモーフィングライブラリとした。

1. モーフィングの定式化

頂点数 n のポリゴンのスタートの位置座標を $P = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ 、ゴールの位置座標を $Q = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ 、変数ベクトルを $V = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ とする ($p_i, q_i, v_i \in \mathbb{R}^3$)。また、 T を三角形分割されたポリゴンの集合とし、 A_k をポリゴン $k \in T$ より得られる P から Q へのアフィン行列の線形行列部分、 B_k をポリゴン $k \in T$ より得られる P から V へのアフィン行列の線形行列部分とする。

1.1 モーフィング手法

局所補間関数は $A : \mathbb{R} \rightarrow M_3(\mathbb{R}) (A(0) = I, A(1) = A)$ を満たすものとし、 $A \in M_3(\mathbb{R}) (t \in [0, 1])$ に対して $A_L(t) = I(1-t) + tA$ を線形補間、 $A_P(t) = R_{(t\theta, n)}((1-t)I + tS)$ を極分解補間、 $A_E(t) = R_{(t\theta, n)} \exp(t \log(S))$ を指数補間と呼ぶ (ただし R, S は A の極分解によって得られる $R \in SO(3), S \in Sym_+(3)$ とし、ここで S は $S(A)$ と書く)。

局所エラー関数は関数 $E : M_3(\mathbb{R}) \times M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ であり、以下局所エラー関数として $E_F(A, B) = \|A - B\|_F^2$, $E_R(A, B) = \|S(A) - S(B)\|_F^2$ の二つを用意しておく。

制約関数は関数 $C : (\mathbb{R}^3)^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする。

大域エラー関数は局所補間関数、局所エラー関数、制約関数をまとめた $GE(P, Q, T, V) = \sum_k E(A_k, B_k) + C(V)$ と定義する。与えられた P, Q, T に対して GE を最小化する V を求め、その軌跡を記述することでモーフィングを得る。

2. Shape Matching を用いた改良

2.1 前処理としての Shape Matching

ShapeMatching は弾性体シミュレーションに使われている技術で、 $\sum_i (R(p_i - t_p) - (q_i - t_q))^2$ を最小化するような回転行列 R 、平行移動ベクトル t_p, t_q を求めるやり方である。 P, Q に対し上記を満たす回転/平行移動を施した $P' = R(P - t_p), Q' = Q - t_q$ においてモーフィングを行う方法を実装した。

2.2 Shape Matching と勾配降下法

1.1 の手法と比較をした以下のアルゴリズムに対して実験を行った。

```
V ← P
while V ≠ Q do
  A' = arg min_A ∑ (Aq - x)2
  X ← X - delta  $\frac{dE(X)}{dX}$  ( $E(X) = \|S^2(X) - I\|_F^2, A' = RS$ )
end while
```

X の軌跡を出力することでモーフィング結果を得る。しかし、ShapeMatching は弾性体の動きをうまく表現することはできるがこのアルゴリズムではゴールの位置座標にたどり着かない場合がある。この解決策として各辺や面積の

¹ 九州大学大学院数理学府
〒 819-0395 福岡市西区元岡 744
^{a)} ma217029@math.kyushu-u.ac.jp

大きさを保つ制約を設けることで改良を行った。最後にその結果を示す。図1の上の遷移は上記アルゴリズムの結果であり、最終位置にたどり着いていない。下の遷移はそれに辺、面積、重心からの距離を保つように制約を加えたものであり、最終形状に到達している。

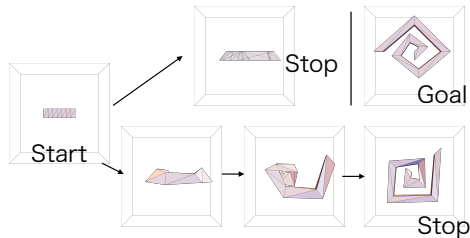


図1 ShapeMatching と勾配降下による変形

3. まとめ

参考文献

- [1] S. Kaji, S. Hirose, S. Sakata, Y. Mizoguchi, K. Anjyo. 2012. Mathematical analysis on affine maps for 2d shape interpolation. ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation, pp. 71-76.
- [2] S. Kaji. 2016. TETRISATION OF TRIANGULAR MESHES AND ITS APPLICATION IN SHAPE BLENDING. Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis III, pp. 7-19.
- [3] M. Muller, B. Heidelberger, M. Teschner, M. Gross. 2005. Meshless Deformations Based on Shape Matching. ACM SIGGRAPH 2005, pp 471-478.