

二次元データ構造を用いた凹凸面上での 厚みを持つ絵具のシミュレーション手法

馬場銀河[†] 齋藤豪^{††}

[†] 東京工業大学 大学院情報理工学研究科 ^{††} お茶の水女子大学 大学院人間文化創成科学研究科

1 はじめに

計算機上の画材シミュレータにはデータ利用による様々な利点があり需要が見込める。画材シミュレーションの先行研究として流体計算に基づいた手法が数多く提案されている。流体計算に三次元データ構造を用いる場合 [1]、流体の挙動をより正確に表現することが可能となるがその分計算コストも上昇する。また二次元データ構造を用いて流体計算を行う場合には [2, 3]、計算速度の向上が見込める反面、精度の高い流体表現のための工夫が必要となる。

我々はこれまで、二次元格子を用いて絵具の厚みを表現し且つ絵具の体積保存が可能な手法を提案してきた。本稿では支持体の凹凸のモデル化および垂直方向の速度分布を考慮した粘性モデルの導入を行い、凹凸面上における絵具の挙動を表現可能な手法を提案する。また格子点間を連続関数で近似することにより絵具表面を滑らかに生成する。

2 流体計算アルゴリズム

2.1 前提条件

本手法では [3] と同様に、格子点 $x = (x, y)$ における絵具の状態を支持体からの高さ $h(x)$ と速度 $u(x) = (u, v)$ 、およびそれらの x, y 方向の空間微分によって表す。流体計算は時間経過による変化と移流による変化を h, u, v それぞれについて計算することで行い、特に u, v については粘性流体の運動方程式を表すナビエ・ストークス方程式を基にして次式により時間経過による変化を計算する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + F \quad (1)$$

ここで ρ, p, ν, F はそれぞれ密度、圧力、動粘性係数、外力を表す。格子点が持つ速度データ $u(x)$ は位置 x 支持体からの高さ z における速度 $u(x, z)$ について高さ方向の平均をとったものとする。

$$u(x) = \frac{1}{h(x)} \int_0^{h(x)} u(x, z) dz \quad (2)$$

Simulation of paint with thickness on irregular surfaces using two-dimensional data structures

[†] Ginga Baba

^{††} Suguru Saito

Graduate School of Information Science & Engineering, Tokyo Institute of Technology ([†])

Graduate School of Humanities and Science, Ochanomizu University (^{††})

$u(x, z)$ については 2.2 節で詳しく述べる。

式 (1) 中の外力項 F として、絵具全体にかかる体積力 F_i と表面張力 T の水平成分の和を与える。 F_i として格子全体にかかる定数 F_c を与えることで絵具が垂れる挙動をシミュレートする。また T は CSF モデル [4] を参考に $T(x) = \sigma_s \kappa(x) n(x)$ で与える。ここで σ_s は定数、 κ は絵具表面の曲率、 n は絵具表面内向き法線ベクトルを表す。

式 (1) 中の圧力勾配項 ∇p は水圧 W と表面張力 T の鉛直成分 T_z を用いて $\nabla p(x) = \nabla W(x) + \nabla T_z(x)$ として与える。水圧勾配は重力加速度 g を用いて $\nabla W(x) = \rho g \nabla h_p(x)$ とした。

また今回は支持体の凹凸をモデル化するために、基準面から凸面までの高さ c とその x, y 方向の空間微分をデータとして用意する。基準面から絵具表面までの高さ h_p は h と c の和で表される。

2.2 垂直方向の速度分布

微小時間における絵具の流体としての挙動が定常流に近く、 $\partial u / \partial t = 0, \partial u / \partial x = 0, \partial u / \partial y = 0, \nabla p = 0, F = \text{Constant}$ であると仮定すると式 (1) より $u(x, z)$ は z の二次関数であることが導出される。この時 $u(x, z)|_{z=0} = 0$ およびパラメータ α を用いて $z = \alpha h(x)$ で $u(x, z)$ が最大の速さをとるものとする。と係数 a を用いて以下の式が導出される。

$$u(x, h) = ah^2 - 2a\alpha h(x)h \quad (3)$$

上式と式 (2) から $a = 3u(x)/(1 - 3\alpha)h(x)^2$ となる。この時 $\partial^2 u(x, h)/\partial z^2$ について式 (2) と同様に高さ方向の平均を取ることで式 (1) 中の $\partial^2 u/\partial z^2$ は次式で与えられる。

$$u_{zz}(x, \alpha) \equiv \frac{\partial^2 u(x)}{\partial z^2} = \frac{6}{1 - 3\alpha} \frac{u(x)}{h(x)^2} \quad (4)$$

図 1 に示すように $\alpha < 1$ の場合は表面張力による抵抗が発生し、絵具表面付近において速度値が減少する条件であると言え、逆に $\alpha > 1$ の場合には表面張力により表面付近で速度値が増大する条件であると言える。また粘性応力が一般的に速度方向と逆向きの力となることを考慮すると $1/3 < \alpha$ が必要条件となる。 $\partial^2 u(x)/\partial z^2$ は表面張力の働く向きと進行方向ベクトルの内積を元にした一次補間により $u_{zz}(x, \alpha_{min})$ と $u_{zz}(x, \alpha_{max})$ の範囲で連続的に与える。

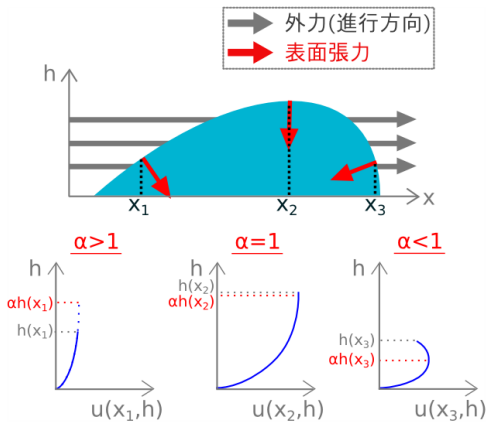


図 1: 表面張力の向きと速度分布に関するモデル図

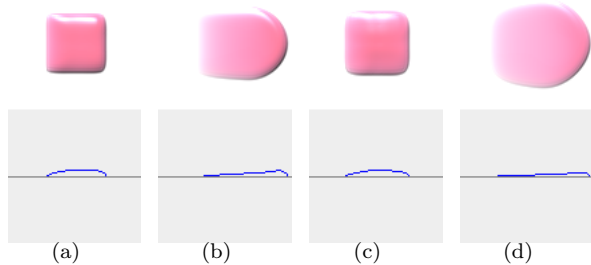


図 2: 異なる粘性モデルによる結果画像

3 結果

二次元格子として周期境界を持つ 100×100 のデータ領域を用意し、格子間隔 $d = 1$ 、時間ステップ $\Delta t = 0.004$ としてシミュレーションを行った。レンダリングは [3] と同様の手法を用いて行った。図 2(a)(b) は $\alpha_{min} = 0.5$ 、 $\alpha_{max} = 1.2$ として連続的に速度分布を与え、画像右方向に外力を与えた垂れシミュレーションの結果である。また (c)(d) は固定値 $\alpha = 1.0$ を与えて同様のシミュレーションを行った結果である。表面張力を考慮した速度分布を格子点毎に与えることにより絵具の零形状が表現されることがわかる。図 3 図 4 は異なる動粘性係数 ν を持つ流体に対して画像下方向の外力を与えた垂れシミュレーションの 1200 ステップ毎の結果画像である。二次元構造を用いる本手法であっても、厚みをもつ粘性流体が示す様々な挙動を再現できていることがわかる。また図 5 は絵具同士の重なりを含むシミュレーション結果である。図 6 は格子点間の補間により拡大生成された格子から得られる結果画像と 1 計算格子点につき 1 ピクセルで描かれた結果画像である。高さの空間微分値を保持する本手法は、格子点間の値を連続的に取得することにより光路計算における誤差の少ない高品質画像を生成することが可能である。



図 3: 垂れる高粘性絵具のシミュレーション



図 4: 垂れる低粘性絵具のシミュレーション

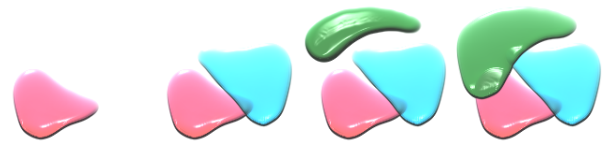


図 5: 絵具同士の重なりを含むシミュレーション

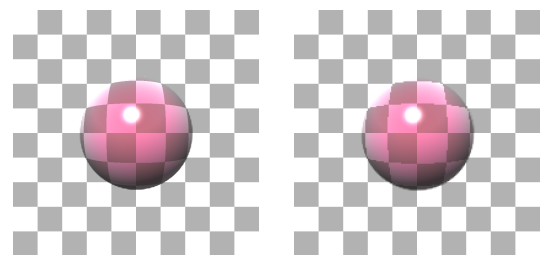


図 6: 拡大格子から生成される画像 (左) と画像に対する単純な拡大から生成される画像 (右)

4 まとめと考察

凹凸面上での粘性流体の計算を二次元データ構造を用いて行った。絵具のような小スケールの流体計算においては表面張力が与える影響が高まるため適切なモデル化が必須となる。凹凸面上での計算が可能な本手法は絵具の重ね塗り表現も行うことができ画材シミュレータへの応用も期待できる。

参考文献

- [1] W. Baxter, Y. Liu, and M.C. Lin. A viscous paint model for interactive applications. *Computer Animation and Virtual Worlds*, Vol. 15, No. 3-4, pp. 433-441, 2004.
- [2] 竹本義孝, 齋藤豪. 描画支持体上における絵具のシミュレーション. *IPSJ 第 74 回全国大会論文集 5ZB-5*, 2012.
- [3] 馬場銀河, 齋藤豪. 仮想絵具のための連続関数近似を用いた液滴シミュレーション. *IPSJ 第 76 回全国大会講演論文集*, 2014.
- [4] JU Brackbill, D.B. Kothe, and C. Zemach. A continuum method for modeling surface tension. *Journal of computational physics*, Vol. 100, No. 2, pp. 335-354, 1992.