

万能チューリング機械のわかりやすい動作説明

脇阪 昇^{1,a)} 中谷 多哉子² 村上 祐子³ 辰己 丈夫²

概要: 中高生に情報に関する授業を行う目的として、論理的思考力を習得させることは極めて重要である。論理的思考を鍛える一つの題材として、総てのコンピュータの元となった万能チューリング機械をとりあげてみた。万能チューリング機械の振る舞いは難解であるが、筆者オリジナルの表記法にもとづき、できるだけわかりやすい形で示した。

1. はじめに

平成 25 年の閣議決定で「世界最先端 IT 国家創造宣言」が打ち出された。その中で初等中等教育においてプログラミング教育が重視されている。全ての生徒が将来プログラマーの職に就くわけではないのになぜか。それは農耕社会にルーツを持つ日本人が、狩猟社会から発展した西欧人と比べて論理的思考力が弱いからである。あらゆるものの情報化がますます進みグローバル化している現代において、これからの社会を担う中高生に論理的思考力を体得させることは重要な課題である。この課題への取り組みの一つとして、筆者は、イギリスの数学者であるアラン・チューリング [1912-1954] の論文、「計算可能な数について、その決定問題への応用」 [1] に着目した。その論文の中で計算論理を突き詰め独創的なアイデアで提唱された計算機械は、デジタルコンピュータ発展の原点となった。

以下、2. では、チューリング機械の仕組みをその構造と動作について、より理解しやすい形で記す。また具体的な計算事例（足し算と掛け算）について、アルゴリズムを忠実になぞったその動きを詳細に示す。チューリング機械は計算原理を示したもので、まどろしく感じるだろう。

そして 3. では、チューリング機械がチューリング機械を動かす、という論文の主目的のために考案された万能チューリング機械を、筆者の一人である脇阪が考案した「E-マス目」と「F-マス目」を 2 段で表記する方法で示す^{*1}。

2. チューリング機械とは

約 80 年前にアラン・チューリングが提唱した計算機械が、この独創性と潜在発展力を評価され、チューリング機械と呼ばれるようになった [2]。アラン・チューリングの経歴や業績及びチューリングの計算理論については、文献 [2][3][4] を参照されたい。

2.1 チューリング機械の仕組み

(1) 機械の構造

チューリング機械は以下の 3 要素から成る。(図 1)

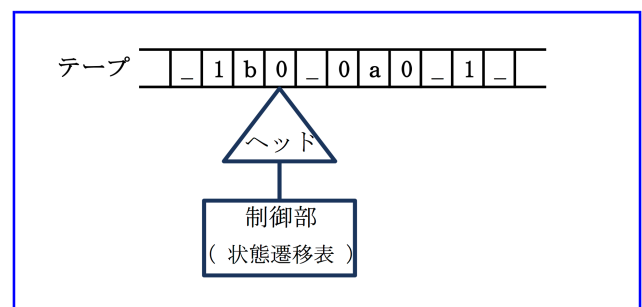


図 1 チューリング機械の構造

- マス目を刻んだ無限長のテープ。
- マス目の数値や文字を読み取ったり、また印刷したりする装置（ヘッド）。
- 現在の機械の状態と読み取った数値や文字を状態遷移表と照合し、その指示に基づきマス目に数値や文字を印刷し、ヘッドの移動方向を指示する制御部。

(2) マス目の構造と印刷するルール

- マス目は 2 種類あり、「E-マス目」および「F-マス目」と称し、交互に配置されている。
- 「E-マス目」には、計算実行をサポートするための

¹ 放送大学大学院

² 放送大学

³ 東北大学

^{a)} md-wakizaka@angel.ocn.ne.jp

^{*1} この研究は、脇阪が放送大学の卒業研究で報告した「なぜ、チューリング機械が総てのコンピュータの原点なのか」を、発展させたものである。

記号が印字され、書換や消去が可能である。

- 「F-マス目」には、「0」や「_」（空白）または「1」が印字され、書換や消去が可能である。
- 「書換」は上書き印刷で対応し、「消去」は空白印刷で対応する。
- 各種文献では記載スペースの関係も有り、必ずしも厳密には区別して記されていない。

(3) 機械の振る舞い

- 状態遷移表の指示に従い、数字等を印刷しヘッドを左右のいずれかに1マス移動する。

(4) 状態遷移表（アルゴリズム）の構成（表1）

表1 状態遷移表

入力情報		出力情報		
今の状態	読取情報	書込情報	移動方向	次の状態

- 入力情報として、“現在の機械の状態”と“読み取ったマス目の情報”があわさってアルゴリズムが特定される。
- 出力情報として、“印刷する数値や文字”と“ヘッドの移動方向”及び“次の状態”が指定される。

2.2 チューリング機械による足し算の事例

具体的な足し算 (4 + 3) の事例を示す。なおスペースの都合上「F-マス目」のみを使用する。状態遷移表は、表2に記す。

表2 足し算の状態遷移表

動作指示	読み取ったテープの内容 (R)						
	「1」の場合			「_」の場合			
今の状態 (T)	A	書込	移動	状態	書込	移動	状態
	B	1	R	A	1	R	B
	C	1	R	B	_	L	C
	Z	_	S	Z			
		計算終了					

テープの内容とヘッドの位置及び現在の状態の変化を、図2に記す。

足し算の場合は、被加数 m と加数 n を連結するため簡単な動作で計算結果が得られる。ステップ数は、 $m + n + 4$ となる。この結果から、どのような足し算もチューリング

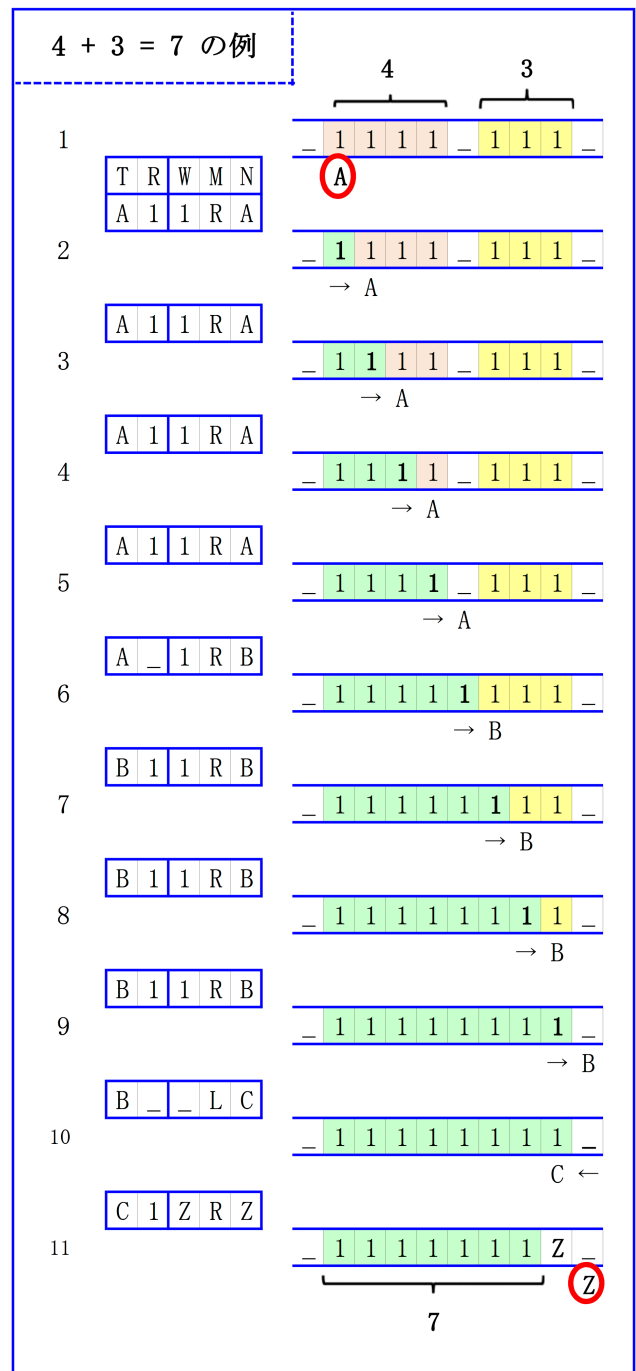


図2 足し算の動作事例

機械で計算できることは明白である。

本質的な問題ではないが、より少ない紙面で動作を表記する方法を図3に記す。

紙面の都合で紹介できないが、引き算のステップは足し算と比べて格段に多い。結果が負となる計算を筆者がトライした結果では、 $(n+5)(n-1) + m + 7$ となり、 n^2 のオーダーを得た。ただし m は被減数で、 n は減数である。

引き算のステップ数が多いのは、ヘッドを何度も左右に往復させなければならないからである。

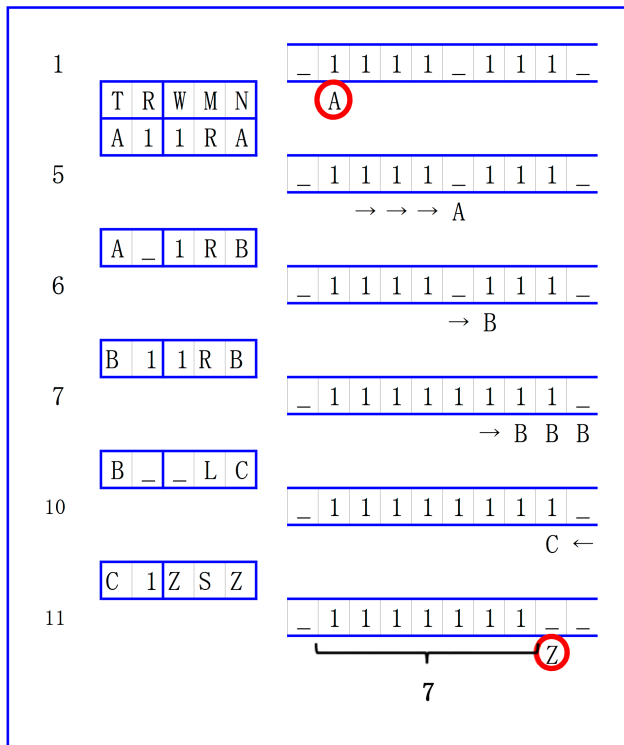


図 3 足し算の動作事例 (短縮表記版)

2.3 チューリング機械による掛け算の事例

つづいて、 3×3 の事例を記す。この場合も「F-マス目」のみで動作は表現できる。

計算のアルゴリズムは、少しでもステップ数を減らすため、 $m \times n = m \times (n - 1) + m$ とした。

状態遷移表を表 3 に示す。

計算過程は、図 7 に記す。

2.4 数値の表記について

ここで演算する数値のテープに対する表記法について考察する。チューリング機械では、数値を表す数だけマス目を用意し、「1」を埋めている。したがってたった 2 桁の数値を表現するだけで、普通のノートでは横一列に記載することがむずかしい。これは、チューリング機械が“テープ長”と“ステップ数 (計算時間)”を無制限とし、計算の原理を示したためである。

一例として「14」をチューリング機械式記法と、よく知られた 4 ビット 2 進表記法を比べ、図 4 に示す。

2.5 チューリング機械についての考察

「アルゴリズムがあることは、チューリング機械で計算できることと同値である」と言われているが、その理由はチューリング機械の機能には「曖昧さがない」、「逐次処理の機構を備えている」そして「条件分岐が可能である」の 3 点が備わっていることである。

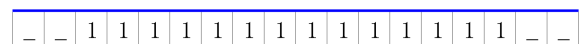
第 1 点 現在の状態と読み取ったテープの記号から状態遷

表 3 掛け算の状態遷移表

動作指示		読み取ったテープの内容 (R)					
		「1」の場合			「_」の場合		
今の状態 (T)	A	書込	移動	状態	書込	移動	状態
	W						
	M						
	N						
	1	R	A	_	R	B	
	1	R	B	_	L	C	
	-	L	D				
	1	L	D	1	L	E	
	-	L	F				
	1	L	F	_	L	G	
	1	L	G	1	R	H	
	1	R	H	_	R	I	
	1	R	J	1	R	K	
	1	R	J	_	L	E	
	-	R	L	1	R	K	
	1	R	M				
	1	R	B	_	L	N	
-	L	O	_	L	N		
-	L	P	_	L	O		
1	L	P	1	R	Q		
1	R	Q	Z	R	Z		
Z							

計算終了

チューリング機械式記法で「14」を表現する



4ビット2進記法で「14」を表現する

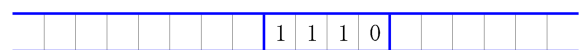


図 4 数値の表記について

移表を参照すると、「印刷する記号」、「移動方向」、「次の状態」が一意に決定できるため曖昧さがないことである。

第 2 点 ステップ毎にテープの文字を読み込み、指示された通りに印字しヘッドを移動した後、次のステップに移っていく逐次処理の機構を備えていること。

第 3 点 同じ状態でも読み取ったテープの内容により異なった動作が選択でき、条件分岐が可能なことである。

従ってループ構造とループからの脱出方法も状態遷移表で容易に設定できる。

3. 万能チューリング機械とは

チューリング機械は一つのプログラム（状態遷移表）を実行するだけだが、万能チューリング機械はあらゆるプログラムが実行できる。その理由は、個別のプログラムをデータと同様に扱うような仕組みとなっていることによる。我々が使っているパソコンも文書作成や表計算ができ、またインターネットの検索も可能であり、あらゆることができる万能性を有している。万能チューリング機械はまさにその原点に位置する。プログラムをデータと同列に扱うことは、コンピュータの進化の第一歩であり、極めて重要なアイデアであった。

3.1 万能チューリング機械の仕組み

3.1.1 テープの構造

万能チューリング機械のテープは、図5に示すように3領域構造となっている。

- 第1領域は、チューリング機械のアルゴリズム（状態遷移表）が記載されている。
- 第2領域は、チューリング機械のテープと同様に、計算の対象となるデータが記載される入力部であるとともに、計算結果が印刷される出力部でもある。
- 第3領域は、今の状態と読み取ったテープの内容、すなわち計算過程を記録するエリアである。

3.1.2 状態遷移表の構造

万能チューリング機械の状態遷移表は、表4に示すように複雑である。これは、計算する実態であるSTM（単能チューリング機械）の動作指示を万能チューリング機械のメモリーの中に一次蓄えておく必要があるからである。

またテープが2段になっているため、現在の状態、読取内容及び書込内容のいずれにも、「E-マス目」と「F-マス目」の情報が必要である。

移動方向については、第2領域においてSTMの指示で動作させる場合を除いて、すべて万能チューリング機械に固定値として設定した。

3.2 「E-マス目」と「F-マス目」について

万能チューリング機械の動作は複雑となっているため、「E-マス目」と「F-マス目」の両方を使わないとうまく説明できない。しかしながら文献ではページサイズの制約があるため、混在させた表記が多い。筆者は図6に示すように「E-マス目」と「F-マス目」を2段で表記する方法を考案した。

図6には第1領域を例に両者の比較を示す。図8と図9でわかるように、第2領域と第3領域に適用した場合は、スペースの節約が顕著であるばかりではなく、「E-マス目」

の記号がプログラムカウンターの役目を担っており、動作がより理解されやすい形に表現できる。

3.3 万能チューリング機械による足し算の事例

万能チューリング機械を使ってSTM（単能チューリング機械）のアルゴリズムがどのような形で遂行されるのか、ここでは2.2で示した足し算について具体的な動きを図8と図9で示す。STMのアルゴリズムを忠実になぞって動く様子が理解されるであろう。

3.4 万能チューリング機械についての考察

万能チューリング機械の状態遷移表こそ、今日ではOS（オペレーティングシステム）と呼ばれているものである。従って個々のチューリング機械は、アプリケーションソフトウェアにほかならない。アプリケーションソフトウェアも、ニーズの多様化とシーズの発達に伴い次々と新しいタイプのものが出現してきた。それに伴いOSもバージョンアップされ今日では巨大なプログラムとなっている。

4. おわりに

以上チューリング機械の原理と足し算及び掛け算に対する具体的な動作、さらには万能チューリング機械の仕組みの説明と動作事例について述べてきた。限られたスペースの中で、標題に掲げた「分かりやすい説明」にどこまで迫ることができたであろうか。

意欲のある中学・高校の生徒に対して、授業や時間外教材として活用されることを望んで作成した。難解な動作を極力平易に詳述したいが、紙面の都合でその一部だけしか記載できなかったのは残念である。

参考文献

- [1] Alan Mathison Turing: 計算可能な数について、その決定問題への応用、(1936).
- [2] 高岡詠子: チューリングの計算理論入門、講談社(2014).
- [3] チャールズ・ペゾルド: チューリングを読む、日経BP社(2012).
- [4] 伊藤和行, 佐野勝彦, 杉本舞: コンピュータ理論の起源 [第1巻] チューリング, 近代科学社(2014).

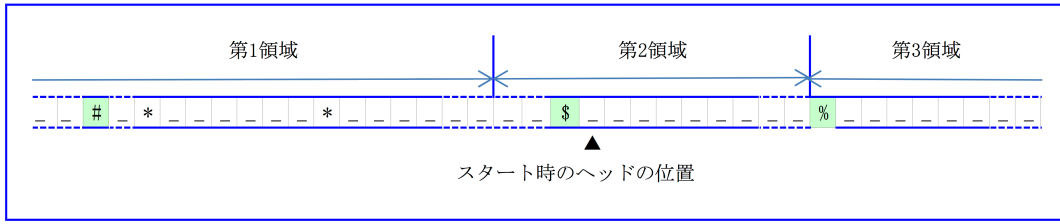


図 5 テープの領域分割

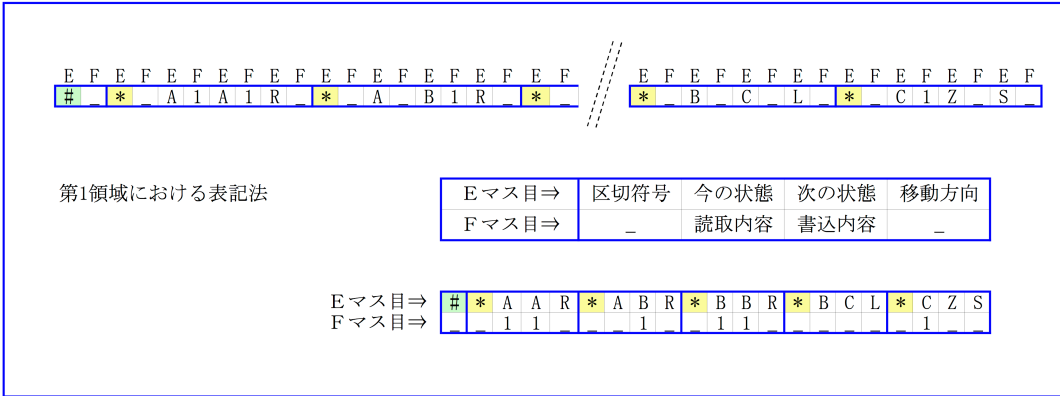


図 6 「E-マス目」と「F-マス目」の表記法の変更

表 4 万能チューリング機械の状態遷移表

STEP	現在の状態		読取内容		書込内容		移動方向	次の状態	SMTの動作指示		
	Eマス目	Fマス目	Eマス目	Fマス目	Eマス目	Fマス目			Eマス目	Fマス目	移動録
	SE	SF	RE	RF	WE	WF			ME	MF	MM
1_0	df=\$							df=\$	df=A		
1_1	\$	RF=1		RF=1			R	%	A		
1_2a	%	1	no-%				R	%	A		
1_2b	%	1	%		ME=A	SF=1	R	%B	A		
1_2c	%B	1			%		L	#	A		
1_3a	#	1	no-#				L	#	A		
1_3b	#	1	#				R	*	A		
1_4a	*	1	no-*				R	*	A		
1_4b	*	1	*				R	ME=A	A		
1_5a	ME=A	1	no-ME				R	*	A		
1_5b	ME=A	1	ME=A				S	A	A		
1_6a	A	1		no-MF			R	*	A		
1_6b	A	1		MF=1			R	RX	A		
1_7a	RX	1	RE=A	RF=1			R	RY	RE=A	RF=1	
1_7b	RY	1	RE=R				R	\$S	A	1	RE=R
1_8a	\$S	1	no-\$				R	\$S	A	1	R
1_8b	\$S	1	\$		_	MF=1	MM=R	\$B	A	1	R
1_9a	\$B	1					S	\$	A	1	R
1_9b	\$B	1			\$		S	\$	A	1	R

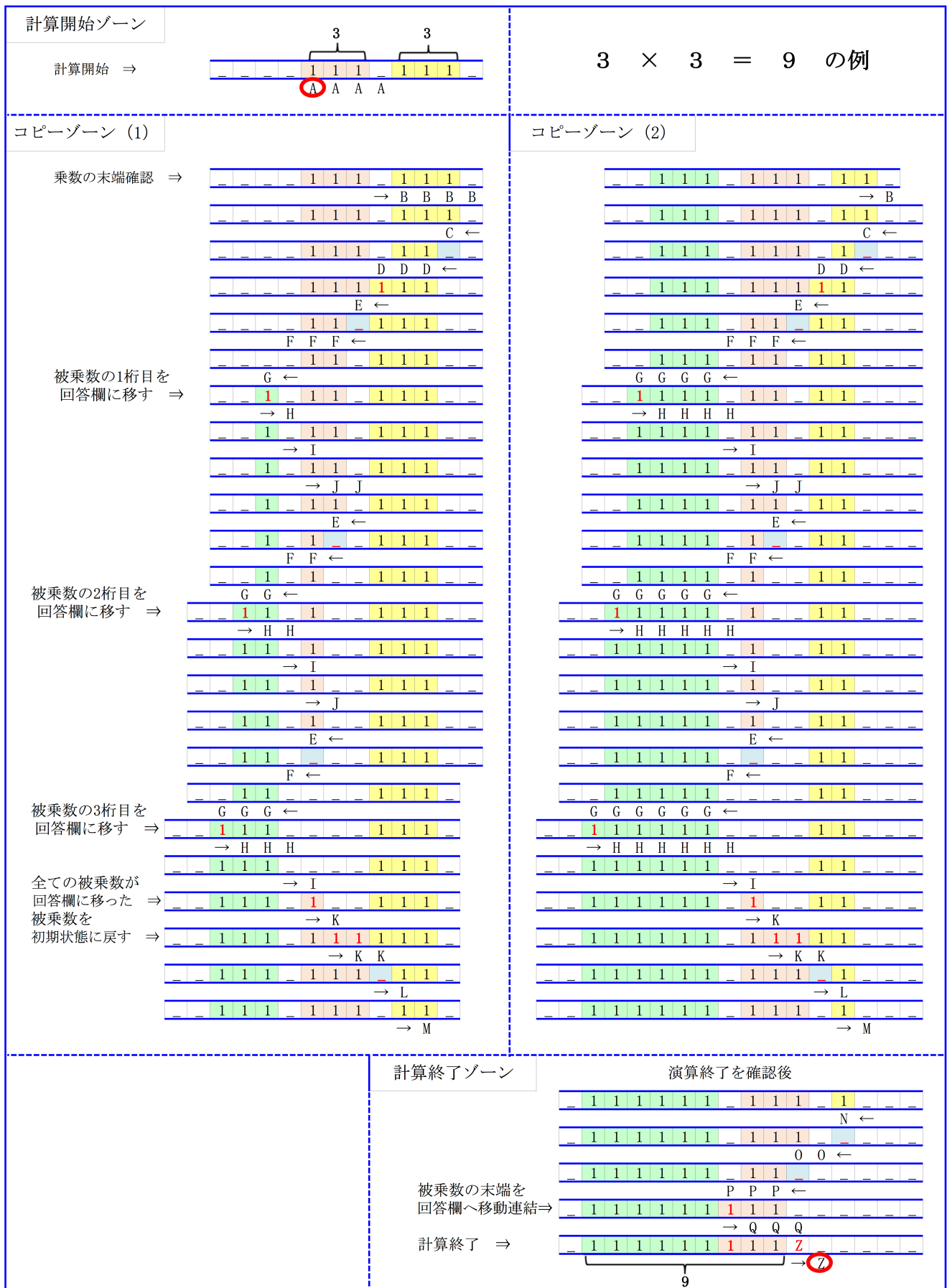


図 7 掛け算の動作事例

4 + 3 = 7 の計算

読取内容		書込内容		移動	現在の状態		次の	SMTの検索		
Eマス目	Fマス目	Eマス目	Fマス目	方向	Eマス目	Fマス目	状態	Eマス目	Fマス目	移動録
RE	RF	WE	WF	MV	SE	SF	NS	ME	MF	MM

1_0 SEとNSとME にdefault値を設け

SE	SF	NS	ME	MF	MM
\$		\$	A		

1_1 [2] のNSとMVに%とRを書込み、SFへRFの内容を格納し右へ移動する

第①領域										第②領域					第③領域				
#	*	A	A	R	*	A	B	R	...	*	C	Z	S	\$	%				
	1	1				1			...	1	Z	S		1	1	1	1		

MV	SE	SF	NS	ME	MF	MM
R	\$	1	%	A		

1_2a [3] へ移動し、%を探す

#	*	A	A	R	*	A	B	R	...	*	C	Z	S	\$	%				
	1	1				1			...	1	Z	S		1	1	1	1		

SE	SF	NS	ME	MF	MM
%	1	%	A		

1_2b [3] の%部にMEとSFの内容を書込み、NSを%に変更し右へ移動する

#	*	A	A	R	*	A	B	R	...	*	C	Z	S	\$	%				
	1	1				1			...	1	Z	S		1	1	1	1		

SE	SF	NS	ME	MF	MM
%	1	%	A		

1_2c [3] のWEに%を再記入し、NSを#に変更し、移動方向を反転する

#	*	A	A	R	*	A	B	R	...	*	C	Z	S	\$	%				
	1	1				1			...	1	Z	S		1	1	1	1		

SE	SF	NS	ME	MF	MM
%	1	%B	A		

1_3a [1] へ移動し、#を探す

#	*	A	A	R	*	A	B	R	...	*	C	Z	S	\$	%				
	1	1				1			...	1	Z	S		1	1	1	1		

MV	SE	SF	NS	ME	MF	MM
L	#	1	#	A		

1_3b [1] の左端#で移動方向を反転し、NSに*を書き込む

#	*	A	A	R	*	A	B	R	...	*	C	Z	S	\$	%				
	1	1				1			...	1	Z	S		1	1	1	1		

MV	SE	SF	NS	ME	MF	MM
R	#	1	*	A		

1_4a [1] で*を探す

#	*	A	A	R	*	A	B	R	...	*	C	Z	S	\$	%				
	1	1				1			...	1	Z	S		1	1	1	1		

SE	SF	NS	ME	MF	MM
*	1	*	A		

1_4b NSにMEの内容を書込み、右へ移動する

#	*	A	A	R	*	A	B	R	...	*	C	Z	S	\$	%				
	1	1				1			...	1	Z	S		1	1	1	1		

SE	SF	NS	ME	MF	MM
*	1	A	A		

1_5a REがSEと不一致の場合は、NSに*を書込み、右へ移動し再検索する

#	*	A	A	R	*	A	B	R	...	*	C	Z	S	\$	%				
	1	1				1			...	1	Z	S		1	1	1	1		

SE	SF	NS	ME	MF	MM
A	1	*	A		

図 8 万能チューリング機械の動作事例 (1)

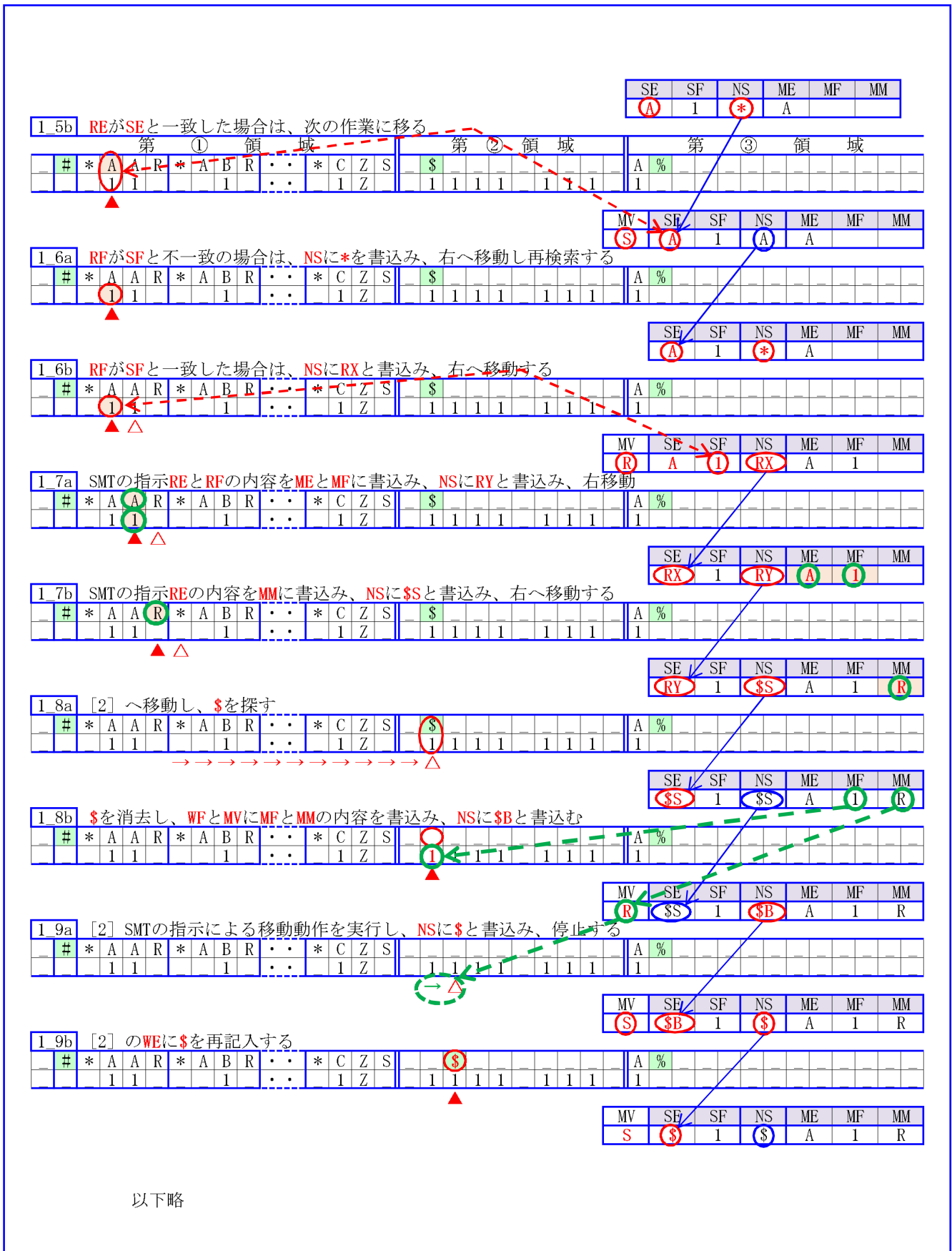


図 9 万能チューリング機械の動作事例 (2)