MELL の証明に要する計算の複雑さ

6 L － 1

三浦 泰介　　山口 文彦　　中西正和
慶應義塾大学大学院 理工学研究科 計算機科学専攻

1. はじめに

線形論理は 1987 年に Girard によって提唱され [1]，計算資源の並行性や消費性を表現し得る動的な論理的枠組みと考えられている [4]．そして，命題論理のクラスのみでカウンターマシンの埋め込みが可能であることから，論理式の証明可能性が決定不能であることがわかっている．線形論理には 7 つの論理演算子が存在するが，その演算子を制限することによって，いくつかのクラスに分けることができる．FPLL, MALL, MLL といったクラスにおける計算の複雑さは，Lincoln らによって証明されているが [5]，MELL については未だ判明していない．

本研究では，MELL クラスの線形論理式に関する計算の複雑さを決定する．

2. 線形論理

線形論理において，仮定は “資源”，結論は “資源を消費することによって満たされる要求” とみなされる [3]．

線形論理式 $(A \otimes B) \multimap C$ の意味は『A と B をちょうど 1 回ずつ用いて C を結論とすることができる』となる．

3. 命題線形論理の計算の複雑さ

命題線形論理において論理演算子を制限することによって分類される，各サブクラスの計算の複雑さは表 3. のようになっている．

クラス	計算量
FPLL	決定不能
MALL	PSPACE–完全
MLL	NP–完全
MELL	不明

4. MELL の複雑さ

MELL はペトリネットとの関係が深く，命題のレベルでペトリネットの可達問題を埋め込むことが可能である．このことから，MELL の計算の複雑さは決定可能であるとしても，少なくとも EXPSPACE–困難であることが示されている [6]．しかし，逆にペトリネットにおいて MELL を表現する方法は提案されていないために，MELL の計算の複雑さは未だ不明である．

Computational complexity for proof in MELL
Taisuke MIURA　Fumihiko YAMAGUCHI
Masakazu NAKANISHI
Department of Computer Science, Faculty of Science and Technology, Keio University 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, Kanagawa 223, Japan

4.1 MELL による CCS の表現

本研究を行なうに際して，まずプロセス代数 CCS (Calculus of Communicating System)[2] の部分系 (restriction, relabeling を除く) を MELL によって表現した．

定義 4..1 プロセス動作式は以下のように定義される．

$$E ::= x \mid 0 \mid a.E \mid E_1 + E_2 \mid E_1 \mid E_2 \mid \mu x.E$$

ここで，x はプロセス変数，0 は無動作プロセス，a はアクションとする．

プロセスの遷移規則

$\bar{a}$ は a の相補アクション，τ は内部アクションとする．

$$\frac{E_1 \xrightarrow{a} E_1' \quad E_2 \xrightarrow{\bar{a}} E_2'}{E_1 \mid E_2 \xrightarrow{\tau} E_1' \mid E_2'} \qquad \frac{E_1 \xrightarrow{a} E_1'}{E_1 + E_2 \xrightarrow{a} E_1'} \qquad \frac{E_2 \xrightarrow{a} E_2'}{E_1 + E_2 \xrightarrow{a} E_2'}$$

シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ を考える．左辺は送信されてまだ受信されていないアクションとプロセスのマルチセット，右辺は左辺から到達可能なプロセスのマルチセットとする．

プロセス E に対して，E^* を E の線形論理上の表現とする．

- $0^* = 1$
- $(a.E)^* = a \multimap E^*$
- $(\bar{a}.E)^* = a \otimes E^*$
- $(E_1 + E_2)^* = (E_1^* \parr 0) \otimes (E_2^* \parr 0)$
- x がプロセス変数のとき，$x^* = x$
- $(\mu x.E)^* = x \otimes !(x \multimap E^*)$

以下により，CCS の部分系におけるプロセス E の遷移が証明木の上で，E^* の変化に対応していることがわかる．

$$\frac{a \vdash a \quad E^*, \Gamma \vdash \Delta}{a, a \multimap E^*, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{\dfrac{a \vdash a \quad E_1^*, E_2^*, \Gamma \vdash \Delta}{a \multimap E_2^*, a, E_1^*, \Gamma \vdash \Delta}}{(a \multimap E_2^*) \otimes (a \otimes E_1^*), \Gamma \vdash \Delta}$$

$$\frac{\dfrac{E_1^*, \Gamma \vdash \Delta \quad 0, E_2^* \parr 0 \vdash}{(E_1^* \parr 0), (E_2^* \parr 0), \Gamma \vdash \Delta}}{(E_1^* \parr 0) \otimes (E_2^* \parr 0), \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{\dfrac{E_2^*, \Gamma \vdash \Delta \quad E_1^* \parr 0, 0 \vdash}{(E_1^* \parr 0), (E_2^* \parr 0), \Gamma \vdash \Delta}}{(E_1^* \parr 0) \otimes (E_2^* \parr 0), \Gamma \vdash \Delta}$$

すなわち，CCS においてあるプロセスから別のプロセス　遷移するかどうかを決定することは，MELL の論理式の証明可能性と同値である．

従って，CCS の部分系よりも MELL の方が計算に関して複雑であることがわかった．

4.2 Flat MELL の決定性問題

Flat MELL はペトリネットの可達問題を埋め込むために十分な記述能力を持ち，またその決定問題は MELL の決定問題と等価であるということが知られている [7].

Flat MELL の基本的な定義と部分系の決定可能性は以下の通りである [7].

定義 4..2 Flat MELL の論理式は以下のように定義される.

1. 各命題変数 a_i とそれらの否定 $a_i{}^{\perp}$ は論理式である.
2. F_1, F_2 を $!, \multimap$ を含まない論理式としたとき，

$$F_1 \otimes F_2 \ \ , \ \ F_1 \parr F_2 \ \ , \ \ !(F_1 \multimap F_2)$$

は論理式である.

3. 以上で定義されるもののみが論理式である.

定義 4..3 Flat MELL のシーケントは，以下の形で表される.

$$A_1, A_2, \cdots, A_m \vdash B_1, B_2, \cdots, B_n$$

但し，各 A_i, B_j $(0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n)$ は論理式であり，B_j は ! を含まない論理式である.

定義 4..4 Flat MELL の始式は以下の通りである.

$$a \vdash a$$

定義 4..5 リテラル $a_i, a_i{}^{\perp}, \otimes, \parr$ のみから構成される論理式を marking formula と呼び，A, B を marking formula としたとき，$A \multimap B$ を rule formula と呼ぶ.

また，rule formula $A \multimap B$ において，A を負に出現する論理式，B を正に出現する論理式と呼ぶ.

定理 4..1 以下の条件を満たす Flat MELL の部分系は決定可能である.

- 否定を含まない
- シーケント中の任意の rule formula $A \multimap B$ について，

$$|A| \leq |B| \quad \text{または} \quad |A| \geq |B|$$

但し，$|A|$ は A に含まれる変数の個数とする.

4.3 Flat MELL から MALL への変換

定義 4..6 Flat MELL 論理式の標準化とは以下の操作である.

1. $\otimes$ を消し，$\parr$ を $\multimap$ で書き換える.
$(A \parr B \equiv A^{\perp} \multimap B)$
2. 否定はリテラルのみにかかるようにする.
$\left((A \otimes B)^{\perp} \equiv A^{\perp} \parr B^{\perp},\ (A \parr B)^{\perp} \equiv A^{\perp} \otimes B^{\perp}\right)$

次のような Flat MELL のシーケントを考える.

$!\Psi, M \vdash M'$ （Ψ は rule formula の列）

以下に示すアルゴリズムに従い，$!\Psi$ に含まれる各論理式を MALL の論理式で書き換えることにより，Flat MELL の証明可能性を MALL の証明可能性に置き換えることが可能である.

1. 論理式をすべて左辺に移項し，標準化する.
2. a) $!\Psi$ に含まれる rule formula について，負に出現する論理式を A とする.
   b) シーケント中の rule formula すべてに対して，A が負に出現する個数を x，正に出現する個数を y とする．但し，$A^{\perp}$ の出現は -1 とする.
   c) リテラル $A(A^{\perp})$ の個数を z とする.
   d) $!\Psi$ 中で A を含むすべての rule formula f_i に対して，以下の方程式が成立する.

$$f_i : \Psi \text{ 中の } i \text{ 番目の rule formula}$$
$$Count_A^-(!f_i) : !f_i \text{ 中の負に出現する } A \text{ の個数}$$
$$Count_A^+(!f_i) : !f_i \text{ 中の正に出現する } A \text{ の個数}$$
$$Count_{A^{\perp}}(x) = -Count_A(x)$$

$$\sum_i \left(-k_i\, Count_A^-(!f_i) + k_i\, Count_A^+(!f_i)\right) - x + y + z = 0$$

   e) A 以外の rule formula が $!\Psi$ 中に存在するならば，その rule formula について 2. に戻る．存在しない場合は，各 k_i (0 以上の整数) を求める.
3. 求めた k_i を用いて，$!\Psi$ 中の $!f_i$ を $!^{k_i} f_i$ とする.

$$!^{k_i} f_i = \underbrace{f_i, \cdots, f_i}_{k_i \text{ 個}}$$

5. 結論

本研究において，CCS から relabelling と restriction を除いた部分系に対して，あるプロセスから別のプロセスに遷移するか否かを決定することは，MELL 論理式の証明可能性と同値であり，MELL 論理式の証明は計算に関して CCS の部分系よりも複雑であることがわかった．さらに，Flat MELL 論理式を MLL 論理式へ変換するアルゴリズムを提案した．このアルゴリズムにより，変換前と変換後におけるシーケントの証明可能性は変化しないことから，Flat MELL 論理式の証明可能性を MLL 論理式の証明可能性に置き換えることが可能となった．以上から，MELL の決定性問題は Flat MELL の決定性問題と等価であることが知られているので，MELL の証明に要する計算の複雑さは決定可能である.

参考文献

[1] J.-Y. Girard: Linear Logic, *Theoretical Computer Science*, Vol. 50, pp. 1–102, 1987.

[2] R. Milner: Communication and Concurrency, *Prentice Hall*, 1989.

[3] 竹内 外史: 線型論理入門, 日本評論社, 1994.

[4] 岡田 光弘: 線形論理に基づく並行計算モデル, 情報処理, Vol. 37, No.4, pp. 327–332, 1996.

[5] P. Lincoln: Deciding Provability of Linear Logic Formulas, In:*Advances in Linear Logic*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, Cambridge Univ. Press, 1994.

[6] N. Martí-Oliet and J.Meseguer: From Petri nets to linear logic, In:*Springer LNCS 389*, ed. by D.H. Pitt et al., pp. 313–340, 1989.

[7] 松前 進: Flat MELL の決定問題, 修士学位論文, 大阪大学大学院 基礎工学研究科 物理系専攻 情報工学分野, 1995.